Plokštinė

TRIGONOMETRIJA.

Pilnas sistematiškas kursas.

Teorija ir uždaviniai.

Sustatė

A. Jakštas.

KAUNAS

1920.

Plokštinė

TRIGONOMETRIJA.

Pilnas sistematiškas kursas.

Teorija ir uždaviniai.

Sustatė

A. Jakštas.

KAUNAS
1919.

Prakalba.

Atsidarius vienai po kitai lietuviškoms gimnazijoms Vilniuj, Kaune ir kitur, atsirado ir trigonometrijos vadovėlio reikalas. Kadangi man pavyko žymiai pastumėti pirmyn tą matematikos šaką, išrandant 28 naujas prastas trigonometrijos sistemas ir nurodyti kelią į begalinę daugybę naujų sukrautinių trigonometrijos sistemų, tatai aš ir pasiryžau parašyti paprastos elementarės tiesialinijinės trigonometrijos vadovėlį, kaipo įžangą į naują trigonometrijos sistemų tyrimą. Lietuvių kalboje šis vadovėlis yra vienas iš pirmutinių. Autoriaus norėta, kad jis ir mokslo žvilgsniu butu ne paskutinis. Tam tikslui, rašant jį, naudotasi įvairiais svetimomis kalbomis vadovėliais ir rinkta visa, kas juose buvo gera, t. y. mokslo, metodos bei paidagogikos žvilgsniu tinkamiausia. Tais vadovėliais buvo šie:

Franz Bendt. Grundzüge der Trigonometrie. 4-te Aufl. Leipzig 1911.

P. Cranz. Ebene Trigonometrie zum Selbstunterricht. Leipzig 1914.

Niewęgłowski. Trygonometrya z teoryą ilości urojonych. Paryž. 1870.

А. Давидовъ. Начала тригонометріи. Москва 1877.

Н. Спасскій. Систематическое изложеніе теоретической прямолинейной тригонометріи С. П. Б 1879.

А. Малининъ. Руководство прямолинейной тригонометріи. Изд. 19-ое. Москва 109.

С. Будаевскій. Прямолинейная тригонометрія. Полный систематическій курсъ. Примѣры и задачи 2-ое изд С. П. Б. 1904

А. Воиновъ. Прямолинейная тріонометрія съ собраніемъ задачъ 8-ое изд. Павловскъ 1909.

Н. Рыбкинъ. Учебникъ прямолинейной тригонометріи и собраніе задачъ. Изд. 8-ое Москва 1911.

П. Злотчанскій. Прямолинейная тригонометрія. 11-ое изд. Одесса 1911.

П. Курилко. Сборникъ задачъ къ элементарному курсу гоніометріи и тригонометріи. Часть I. Одесса 1912.

Pirmi penki yra originaliausi, likusieji — šabloniniai, maž kuo nuo vienas kito besiskiriantieji. Šie pastarieji buvo naudingi vien tuo, kad parodė, koks buvo trigonometrijos kursas rusų gimnazijose prieš karą.

Kadangi musų matematikos mokytojai yra išėję mokslus daugiausia rusų gimnazijose, tatai rašydamas šį trigonometrijos vadovėlį aš pirmoj ir antroj jo dalyj laikiausi nustatytojo rusų gimnazijų programo. Iš savo šalies pabrėžiau tik aiškiau skirtumą tarp trigonometrijos funkcijų ir linijų, nes tiedvi sąvoki rusų vadovėliuose dažnai painiojama, arba bent aiškiai neatskiriama.

Naujiena mokytojams šiame vadovėlyje bus gal sinų bei kosinų dėstymo teoremos išvedimas, paimtas iš Bendto. Man jis atrodė tuo geras, kad nereikalauja painių brėžinių, kaip kiti tos teoremos išrodymai.

Daugelis rusų vadovėlių verčia mokinius gvildenti trigonometriškus lyginius tuojau kurso pradžioj, vos tik mokiniams susidažinus su pamatiniais trigonometriškųjų funkcijų santikiavi-

mais. Man tai atrodė nepaidagogiška; delei to trigonometriškų lyginių gvaldymą aš ir nukėliau pirmosios dalies galan, paaiškinęs atskirame skirsnyje trigonometriškų lyginių gvaldymo teoriją ir užlaikytinos prie to atsargos reikalingumą.

Klasiški rusų trigonometrijos vadovėliai baigias paprastai trikampių gvaldymo mokslu, kaipo antraja praktiška trigonometrijos kurso dalimi. Aš gi tariaus, busiant neprošalį, pridurus dar ir trečiąją dalį, paduodančią gilesnį trigonometrijos funkcijų esybės išaiškinimą. Taigi toje dalyje surinkau pluoštą žinių, parodančių, kaip trigonometrijos funkcijos yra išreiškiamos geometriškai tam tikrais brėžiniais, kaip jos rutulojama nesibaigiamomis eilėmis bei nesibaigiamais padaugais, kaip jos santikiuoja su naturalių logaritmų pagrindu *e* ir su menamuoju dydžiu *i*.

Galop pabaigoj pridėjau keletą žodžių ir apie savo naujų trigonometriškų sistemų genezę ir jų svarbumą mokslui, kad šio vadovėlio skaitytojas, išėjęs elementarės trigonometrijos kursą, žinotu ne tik paskutinį to mokslo žodį, bet ir kelią, vedantį į naujas, dar neištirtas trigonometrijos sritis. Tie nurodymai skiriama vien mokytojams ir gabesniems mokiniams.

Išdėstydamas trigonometrijos teoriją, neužmiršau ir praktikos: beveik po kiekvieno teorijos skirsnio padėjau ir po uždavinių rinkinėlį. Šiame dalyke laikiausi vidurio kelio, dabodamas, kad uždavinių butų užtektinai, nei perdaug, nei permaž, butent apie 30 kiekvienam skirsniui, neskaitant įvairių uždavinių antrosios dalies gale. Mokinys išgvaldęs jų bent pusę, išeis geras trigonometrijos žinovas.

Ką del trigonometriškos terminologijos, tai negalėdamas pripažinti p. *Šikšnio „Liet. Mokykloje“* 11-me n-je 1918 m. paduotosios tinkama, aš laikiausi savos imdamas ją, kur buvo galima, iš savo *„Pradedamojo Geometrijos vadovėlio“*, išleisto Liet. Mokslo Draugijos 1916 metais.

Kaip kiekviename žmogaus darbe, rasis be abejo ir šiame vadovėlyje nevienas pataisytinas netobulumas. Objektiviai kritikai už jų nurodymą busiu tikrai dėkingas.

Tuotarpu gi, atjausdamas lietuviško trigonometrijos vadovėlio gyvą reikalą, leidžiu jį taip, kaip jis parašytas. Labiaus jį ištobulinti neleido man sunkųs ir neramųs laikai, kuriais man teko jis gaminti.

Kaune 11. I. 19. *Autorius.*

Įžanga.

1. **Trigonometrijos vardas.** Trigonometrija, kaip parodo pats iš graikų kalbos kilusis žodis[1]), reiškia trikampių matavimo mokslą. Trikampis, kaip žinom iš geometrijos, yra prasčiausia geometriškoji figura. Visi daugiakampiai ir by kokios kitos figuros labai lengva išskaidyti trikampiais. Todel žinant trikampių matavimo budą, pigu išmatuoti ir kiekviena kitoki figura. Delei tos priežasties trikampio matavimas nuo senų senovės yr buvęs ypatingu tyrinėjimo dalyku ir davęs pradžią atskirai matematikos šakai, teisingai pramintai trigonometrijos vardu.

2. **Trikampio gvaldymas.** Trikampis laikoma išmatuotu bei žinomu, kuomet yra žinomi visi jo šeši elementai (t. y. trįs jo šonai ir trįs kampai). Kaip žemiau pamatysim, žinant trikampio by kokius tris elementus (by tik tan skaičiun neįeitu vieni kampai) visada galima sužinoti likusiųjų trijų elementų dydžiai. Veiksmas, kuriuo iš žinomujų trikampio elementų surandama likusieji nežinomi, vadinas *trikampio gvaldymu*.

Gvaldoma trikampiai vienu iš dviejų budų: arba *grafiškai* — geometrišku brėžimu, arba *algebriškai* — matematišku apskaitymu. Pirmasai gvaldymo budas, kaipo sujungtas su neišvengiamomis klaidomis, yra negriežtas. Tai pareina ne vien nuo vartojamųjų brėžiant įnagių negriežtumo, bet ir nuo musų pačių jausmų netobulumo. Mat paprastai kampai brėžiama apitikriai, delto, kad nei viename matlankyje nepažymėta ne tik sekundos, bet dažnai nei minutės; brėžimo linijos niekad nebuna griežtai matematiškos linijos, tik jų apitikriai vaizdai, todel ir linijų persikirtimo punktai negalima visai griežtai nustatyti.

---

[1] Nuo žodžių τρίγωνον = trikampis ir μετρεῖν = matuoti.

Brėžinio klaidos didėja dar ir del to, kad dažnai del duotosios ištirti figuros didumo tenka brėžti kita daug mažesnė, vien panaši į ją, imant pav. vieton sieksnio — milimetrą, per ką padarytoji vieno milimetro klaida brėžinyje, tikrumoje atitinka vienam sieksniui. Be to brėžime dar ir tai bloga, kad nežinoma klaidų ribos; visada čia galima tikėties, jog klaidų esama, bet kaip toli jos siekia, nėra kaip sužinoti. Pagalios net ir pačios musų akįs perdaug smulkių dalių (linijų bei kampų) visai neįstengia atskirti.

Kas kita algebriškas trikampių gvaldymo budas: čia visada galima mažesnis bei didesnis griežtumo laipsnis pasiekti, kaip norima. Delei to trigonometrija ir tevartoja šį pastarąjį budą.

3. **Trigonometrijos pamatas.** Kaip jau žinom (§ 1), trigonometrija veda savo pradžią nuo trikampių matavimo. Bet trikampių esama įvairių rušių: tobulų, lygiašonių, smailakampių, kėstakampių, statkampių. Pastaroji rušis yra pati prastoji: visi kiti trikampiai, nuleidžiant iš vienos jų viršunės perpendikulerą į priešais gulintį šoną, pigiai paskaidoma dviem stattrikampiais. Delei tos priežasties trigonometrijos pamatan ir padėta tyrinėjimas stattrikampių. Jų gvaldymas yra žymiai lengvesnis, nes vienam jų elementų — stačiajam kampui esant visada tam pačiam, mainomųjų elementų stattrikampiuose belieka tik penki, butent trįs šonai ir du smailu kampu.

4. **Funkcijų sąvoka.** Statketurkampių plotas, kaip žinom iš geometrijos, pareina nuo jo šonų dydžio ir galima išreikšti viena bendra formula

$$P = xy \quad . \; . \; . \quad (1),$$

kame x, y reiškia statketurkampio šonų ilgius, o P jo plotą. Iš formulos (1) savaime aišku, jog didėjant x-ui ar y-ui, t. y. katram nors statketurkampio šonui arba net ir abiem susyk, statketurkampio plotas P eis didyn; mažtant gi x-ui bei y-ui arba abiem susyk, P eis mažyn. Vadinas P dydis yra priklausomas nuo x ir y dydžių. Kitaip sakant, mainanties x-ui ir y-ui, mainysis ir P dydis, nes čia tarp jų esama tam tikro sąryšio išreikšto formula (1).

Matematikoj toksai sąryšis tarp kelių nuo vienas kito priklausomų dydžių vadinas **funkcija**. Todel ir galima pasakyti, jog statketurkampio plotas yra jo šonų funkcija. Matematiškai tai pažymima simbolišku lyginiu:

$$P = f\ (x, y)\ .\ .\ .\quad (2)$$

kame x, y vadinas **nepriklausomais mainomaisiais**, o P jų funkcija, kas ir išreiškiama dedant prie x, y raidę f, F arba φ. Jei funkcija butu ne viena, bet daugiau, tuomet joms pažymėti vartojama tie patįs simboliai f, F bei φ tik su ženkleliais iš paeilinių skaičių pav. $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n$; $F_1, F_2, \ldots F_n$.

Augščiau paduotoje funkcijoje (2) yra du mainomuoju x ir y; jų gali buti funkcijoje ir daugiau, pav. 3, 4, ... n; tokios funkcijos vadinas trimis, keturiais, . . . n mainomaisiais; pav. $\varphi\ (x, y, z)$ bus funkcija trimis mainomaisiais; $f\ (x, y, z, t)$ — funkcija keturiais mainomaisiais ir tt. Paprasčiausiomis funkcijomis yra funkcijos vienu mainomuoju. Pav. jei lyginyje (1) prileistumėm statketurkampio šonus x, y esant vienokio ilgio, tuomet prie sąlygos $x = y$ lyginys (1) įgautu išvaizdą:

$$P = x^2\ .\ .\ .\ .\quad (3)$$

kuri reikštu, jog statketurkampių lygiais šonais plotas, yra priklausomas tik nuo vieno šono dydžio x. Kitaip sakant šiame atvejyje P butu funkcija tik vienu mainomuoju, kas matematiškai ir žymima paprastai simbolišku lyginiu:

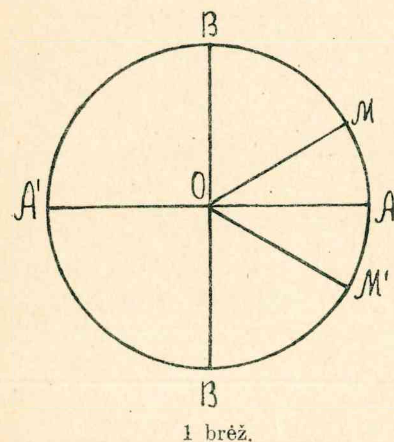
$$P = f\ (x)\ .\ .\ .\ .\quad (4)$$

Panašiu budu žinodami iš geometrijos, jog kampo dydis yra matuojamas pabrėžtojo stipinu = 1 ratilo lanku, galima pasakyti, jog kampo dydis α bus jam atitinkančiojo lanko a funkcija:

$$\alpha = \varphi\ (a)\ .\ .\ .\ .\quad (5)$$

Ši pastaroji funkcija yra viena iš pirmųjų, su kuria trigonometrijoje tenka sutikti. Bet kad jos prigimtį galėtumėm tikrai suprasti, privalome žinoti, kas tai yra kampas ir lankas praplėstoje prasmėje.

5. **Kampo ir lanko sąvokos apibendrinimas**. Elementarė geometrija nevartoja kampų didesnių per 2 statkampiu ir lankų didesnių per 1 ratlankį. Trigonometrijai to neužtenka. Taigi ir pasistengsime čia parodyti, jog kampų ir lankų didėjimui negalima ribų nustatyti, t. y. jog kampų ir lankų dydis gali augti begaliniai. Ir ištikrųjų padalinkime ratlankį dviem perpendikuleriais diametrais keturiomis dalimis (žiur. 1 brėž.). Prileiskim, jog stipinas OA, sukdamasi nuo A punkto B linkon bus atsiduręs OM padėjime, tuomet gausim smailakampį AOM, matuojamą lanku AM. Jei tas pats stipinas OA sukdamasi toliau ton pat šalin atsidurs OB padėjime, gausime statkampį AOB matuojamą lanku AB. Prie tolesnio stipino OA sukimosi gausime kampus: AOA′ = 2 d, matuojamą lanku ABA′; AOB′ = 3 d, matuojamą lanku ABA′B′, AOA = 4 d, matuojamą visu ratlankiu ABA′B′A; 4 d + AOB = 5 d, matuojamą lanku ABA′B′AB ir tt. Iš to matom, jog kampai ir lankai gali buti taip dideli, kaip tinkama.



1 brėž.

Jei stipiną AO suktumėm ne punkto B linkon, bet priešingon šalin punkto B′ linkon, tuomet gautumėm taip pat kampų ir lankų kokio norima didumo.

Gaunamiems šiuose abejuose atvejuose kampams ir lankams atskirti — pirmosios rušies kampų ir lankų reikšmes žymėsime teigiamais skaičiais, antrųjų gi reikšmes — neigiamaisiais. Iš tos priežasties pirmame atvejyje kampus ir lankus vadinsime teigiamaisiais, antrame — neigiamaisiais. Pav. jei kampas AOM bus = α, tai jam lygus kampas AOM′ = — α.

6. **Dvejopas kampų ir lankų matavimo budas**. Iš geometrijos žinom, jog kampai matuojama statkampiu ir jo smulkesnėmis dalimis — gradais, minutėmis, sekundomis.

Imama statkampis kampų mastu delto, kad visų statkampių dydis, delei jų lygumo, yra visada vienoks ir nemainomas. Tą pat ypatybę, t. y. savo dydžio nemainomumą, turi ir statkampio augščiau minėtosios dalįs: gradas visada yr lygus $^1/_{90}$ statkampio daliai, minutė = $^1/_{60}$ grado daliai ir sekunda = $^1/_{60}$ minutės daliai.

Delei kampų proporcionalumo lankams, šie pastarieji matuojama statkampiui atitinkančia ratlankio ketvirtim, kuri taipgi dalinama 90 gradais, kiekvienas lanko gradas — 60 minutėmis, kiekviena lanko minutė 60 sekundomis. Tuo budu kiek koks kampas bus beturįs gradų, minučių, sekundų, tiek pat jų turės ir atitinkantis šiam kampui lankas. Toksai kampų ir lankų matavimas vadinas gradiniu. Trigonometrijoje be jo vartojama dažnai ir kitas kampų bei lankų matavimo budas, vadinamas ratiliniu. Šiame pastarajame kampų matavimo vienetu imama toks centralis kampas, kuriame jam atitinkančiojo lanko ilgis yra lygus to lanko stipinui. Tojo kampo dydis yra taipgi visada vienoks ir nemainomas. Tai pigu matematiškai išparodyti. Tam tikslui teesie tojo kampo dydis m; jam atitinkančio lanko ilgis bus = stipinui r; statkampiui gi d atitinkančiu lanku bus ratlankio ketvirtis $= \frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi r}{2}$. O kadangi centraliai kampai yra proporcionaliai savo lankams, todel gaunąme proporciją:

$$d : m = \frac{\pi r}{2} : r = \frac{\pi}{2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

iš kur, dedant vieton π jam atitinkantį dydį 3,141592 . . . , randame

$$m = \frac{2d}{\pi} = \frac{180^0}{\pi} = 57^0\, 17'\, 44'',\ 80\ .\ .\ .$$

Šis kampas vadinama radianu.

Priėmus jį kampų matavimo vienetu, savaime prieinama išvada, jog kiekvieno kampo mastu galima laikyti šiam kampui atitinkančiojo lanko santikis su tojo lanko stipinu. Nes pažymėję duotojo kampo dydį raide α, o atitinkančiojo jam lanko dydį raide a, gauname tuojau proporciją:

$$\frac{\alpha}{m} = \frac{a}{r} \quad . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Bet laikydami radiano dydį m = 1, randame iš (7), jog

$$\alpha = \frac{a}{r} \quad . \; . \; . \; . \quad (8)$$

O kadangi visada galima ir stipinas r prileisti lygiu = 1, todel galutinai gauname:

$$\alpha = a \quad . \; . \; . \; . \quad (9)$$

tai reiškia, jog kiek kartu kampinis vienetas bei radianas tilpsta kampe, tiek kartų ir lankinis vienetas (stipinas) tilps atitinkančiame duotajam kampui lanke, arba trumpiau sakant, skaičiai reiškiantieji kampo ir lanko dydžius bus tie patįs.

Pasigaunant radiano statkampis galima išreikšti skaičium $\frac{\pi}{2} = 1{,}5707\ldots$, nes atitinkančiame statkampiui ratlankio ketvirtyje $\frac{2\pi r}{4}$ stipinas r tilpsta $\frac{\pi}{2}$ kartų; kampas 45^0 — skaičium $\frac{\pi}{4}$, kampas 30^0 — skaičium $\frac{\pi}{6}$ ir tt.

Panorėjus visada galima kampinis dydis išreikšti lankiniu ir atvirsčiai lankinis dydis kampiniu. Sakysime, duota kampas α gradų. Kadangi visame ratlankyje 2π skaitoma 360 gradų, tai vienam gradui atitinkąs lanko ilgis bus $= \frac{2\pi}{360}$, o lankui α gradų — atitiks lankas ilgiu $= \frac{2\pi\alpha}{360}$.

Ir atvirsčiai, jei turime lanko ilgį = a, tai nesunku atitinkąs jam kampas išreikšti gradiniu mastu, nes visame ratlankio 2π ilgyje skaitoma 360 gradų, todel lanke ilgiu = 1 bus $\frac{360}{2\pi}$ gradų, o lanke ilgiu = a, bus $\frac{360\,a}{2\pi}$ gradų.

Tuo budu reiškiniai a ir $\frac{2\pi\alpha}{360}$ arba α ir $\frac{360.\,a}{2\pi}$ trigonometrijoje dažnai vartojama vienas antro vietoj. Todel remiantis (9) lygybe, gauname dvi nauji:

$$a = \frac{2 \pi \alpha}{360} \quad \text{ir} \quad \alpha = \frac{360 . a}{2 \pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

pirmoji iš jųdviejų parodo, kaip nuo ratilinio kampų matavimo pereiti prie gradinio, antroji —, kaip gradinis matavimas pakeisti ratiliniu.

7. **Trigonometrijos mokslo padala.** Be funkcijos $\alpha = \varphi(a)$ tyrinėjant stattrikampius atrasta dar keletas vienu mainomuoju funkcijų, turinčių didelę svarbą kampų matavime trikampiuose. Nuo to jos ir pavadinta trigonometriškomis; jų teorija taipgi įeina trigonometrijos sritin.

Delei tos priežasties ir visas trigonometrijos mokslas paprastai skaidoma dviem dalim: pirmojon dedama augščiau minėtųjų trigonometriškųjų funkcijų tyrinėjimas, antroje parodoma, kaip pasigaunant tų trigonometriškųjų funkcijų, gvildoma patįs trikampiai. Pirmajai daliai duodama paprastai goniometrijos[1]) vardas, trigonometrija gi griežtoje to žodžio prasmėje vadinama antroji dalis, kaipo specialiai užsiimanti trikampių gvaldymu.

Be tų dviejų, sekant kaikuriais trigonometrijos vadovėlių autoriais (k. š. *Davidovu, Niewęgłowskiu* ir k.) čia pridėta dar ir trečioji dalis, kurioje patiekta pluoštas žinių pačių trigonometrijos funkcijų esybei giliau suprasti. Tam tikslui parodyta, kaip trigonometrijos funkcijos geometriškai nubrėžiama, kaip jos rutulojama nesibaigiamomis eilėmis, nesibaigiamais padaugais, skaidiniais ir tt. Iš šios trečios dalies, tariamės, kiekvienam skaitytojui paaiškės, jog į trigonometriškas funkcijas galima žiurėti ne vien tik kaipo į specialius pagalbinius įnagius trikampiams gvaldyti, bet ir kaipo į savitas matematiškas kreacijas, turinčias labai įdomių, protą stebinančių ypatybių su begaliniai plačiomis pritaikomybės ribomis.

Galop kadangi ir pačių trikampių esama nevienokių, nes jie galima sudaryti netik plokštyje, bet ir skritulio bei sferoido paviršiuje, todel ir trigonometrijos atskiriama ne viena, bet trįs

---

[1]) Nuo graik. žodžių γόνυ keliai, kelių sulenkimas, kampas ir μετρεῖν = matuoti.

rušįs, butent plokštinė, skritulinė bei sferiškoji ir sferoidalė. Mes čia išdėstysime vien tik pirmutinės iš jų, butent plokštinės bei tiesialinijinės trigonometrijos pagrindus.

Norint juos suprasti, reikia turėti pamatinių žinių iš elementarės geometrijos ir algebros, o da geriau — buti išėjusiems visą elementarį tų dviejų mokslų kursą. Be to žemiau dedamieji išvadžiojimai skaitytojui bus nesuprantami.

Tečiau, kad ir priklausoma nuo geometrijos ir algebros, trigonometrija nėra tam tikras tų mokslų praplėtimas bei papildymas; kaip jau pradžioj esam paminėję, trigonometrija yra visai atskira matematikos šaka, turinti savų originalių idejų ir vartojanti savas naujas metodas. Žymiausią vietą tarp tų idejų, užima trigonometrijos moksle augščiau išdėtoji funkcijos ideja.

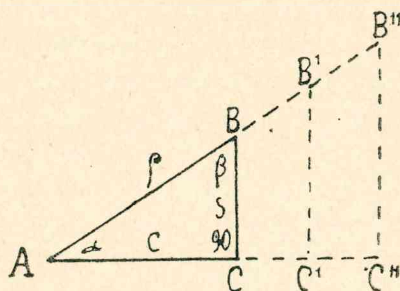
Trigonometrijos pirmoji dalis.

(Goniometrija.)

I. Skirsnys.

Trigonometriškosios funkcijos ir linijos.

8. **Trigonometriškosios funkcijos.** Teesie by koks stattrikampis ABC, kuriame kampas ACB = 90^0, kampas BAC = α ir kampas ABC = β. Trumpumo delei pažymėkim stattrikampio ABC hipotenuzę AB raide ϱ, katetą BC, kurį vadinsime stačiuoju, raide s, katetą AC, kurį vadinsime gulsčiuoju, raide c. Savaime aišku, jog tarp pastarųjų trijų stattrikampio



2 brėž.

ABC elementų ϱ, s ir c tegali buti tik trįs tiesioginiai santikiai:

$$\frac{\varrho}{s}, \quad \frac{c}{\varrho}, \quad \frac{s}{c} \quad \cdots \quad (11)$$

ir trįs atverstiniai:

$$\frac{\varrho}{s}, \quad \frac{\varrho}{c}, \quad \frac{c}{s} \quad \cdots \quad (12)$$

taigi viso labo šeši.

Kiekvienas šių šešių santikių nustato kampo BAC $= \alpha$ dydį. Ir ištikrųjų jei prailgintumėm stattrikampio ABC šonus AB ir AC ir iš by kokių tiesiosios AB″ punktų B′, B″. . . pravestumėm tiesiasias B′C′, B″C″ paralėles tiesiajai BC, tai iš trikampių AB″C″, AB′C′, ABC panašumo gautumėm:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{B''C''}{AB''} &= \frac{B'C'}{AB'} = \frac{BC}{AB} = \frac{s}{\varrho} \\
\frac{AC''}{AB''} &= \frac{AC'}{AB'} = \frac{AC}{AB} = \frac{c}{\varrho} \\
\frac{B''C''}{AC''} &= \frac{B'C'}{AC'} = \frac{BC}{AC} = \frac{s}{c} \\
\frac{AB''}{B''C''} &= \frac{AB'}{B'C'} = \frac{AB}{BC} = \frac{\varrho}{s} \\
\frac{AB''}{AC''} &= \frac{AB'}{AC'} = \frac{AB}{AC} = \frac{\varrho}{c} \\
\frac{AC''}{B''C''} &= \frac{AC'}{B'C'} = \frac{AC}{BC} = \frac{c}{s}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

Tai parodo, kad santikiai (11) ir (12) yra visai nepriklausomi nuo stattrikampio ABC šonų ilgio. Tie šonai gali buti ilgesni ar trumpesni, santikių (11) ir (12) dydžiai visada pasiliks tie patįs, jei tik kampas α nesimainys. Vadinas, santikių (11) ir (12) dydžiai yra priklausomi vien nuo kampo α dydžio, kitaip sakant, tie šeši santikiai yra tam tikros kampo α funkcijos; simboliskai tai galima išreikšti šia lygybų eile:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{s}{\varrho} &= f_1(\alpha) \\
\frac{c}{\varrho} &= f_2(\alpha) \\
\frac{s}{c} &= f_3(\alpha) \\
\frac{\varrho}{s} &= f_4(\alpha) \\
\frac{\varrho}{c} &= f_5(\alpha) \\
\frac{c}{s} &= f_6(\alpha)
\end{aligned}\right| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

Trigonometrijoje šios šešios funkcijos turi savo atskirus vardus ir ženklus butent:

1-ji $f_1(\alpha)$ vadinas sinas ir žymima simboliu $\sin\alpha$,
2-ji $f_2(\alpha)$ vadinas kosinas ir žymima simboliu $\cos\alpha$,
3-ji $f_3(\alpha)$ vadinas tangensas ir žymima simboliu $\mathrm{tang}\,\alpha$,
4-ji $f_4(\alpha)$ vadinas kosekansas ir žymima simboliu $\mathrm{cosec}\,\alpha$,
5-ji $f_5(\alpha)$ vadinas sekansas ir žymima simboliu $\sec\alpha$,
6-ji $f_6(\alpha)$ vadinas kotangensas ir žymima simboliu $\mathrm{cotg}\,\alpha$ [1].

Naudojanties šiais naujais simboliais augščiau paduotoji (14) lygybių eilė išreiškiama šitaip:

$$\left.\begin{aligned} f_1(\alpha) &= \sin\alpha = \frac{s}{\varrho} \\ f_2(\alpha) &= \cos\alpha = \frac{c}{\varrho} \\ f_3(\alpha) &= \mathrm{tang}\,\alpha = \frac{s}{c} \\ f_4(\alpha) &= \mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{\varrho}{s} \\ f_5(\alpha) &= \sec\alpha = \frac{\varrho}{c} \\ f_6(\alpha) &= \mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{c}{s} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Žodžiais simbolis $\sin\alpha$ ištariama — kampo α (alfos) sinas, arba trumpiau α (alfos) sinas, $\cos\alpha$ — kampo α kosinas arba trumpiau α (alfos) kosinas ir tt. Tos pat (15) lygybės parodo draug ir visų trigonometriškųjų funkcijų esybę. Remdamies tomis lygybėmis, mes galime pasakyti, jog —

sinas yra tai stačiojo kateto ir hipotenuzės santikis,
kosinas yra tai gulsčiojo kateto ir hipotenuzės santikis,
tangensas yra tai stačiojo ir gulsčiojo katetų santikis,
kotangensas yra tai gulsčiojo ir stačiojo katetų santikis,

---

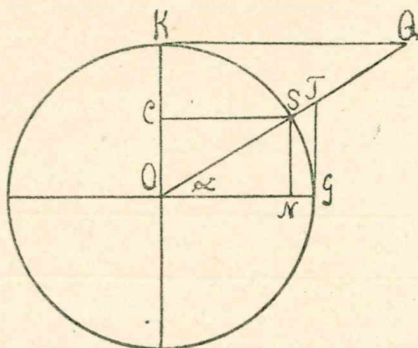
[1]) Rusų vadovėliai dažniausiai *sin* ir *cos* pakeičia simboliais *sn* ir *cs*; trumpumo tie pastarieji simboliai trumpesni, bet, kadangi augštesnioji matematika simboliais *sn*, *cs* pažymi atskiras eliptiškas funkcijas, tatai trigonometriškoms funkcijoms pažymėti mes ir vartosime ženklus *sin*, *cos*.

sekansas yra tai hipotenuzės ir gulsčiojo kateto santikis, kosekansas yra tai hipotenuzės ir stačiojo kateto santikis.

Visų trigonometriškųjų funkcijų dydžiai, kaipo pareinantieji nuo tam tikrų dviejų linijų santikių, yra išreiškiami abstrakčiais skaičiais. Bet trigonometriškosios funkcijos galima išreikšti ir geometriškai tam tikromis linijomis, kurios ir vadiname trigonometriškomis.

9. **Trigonometriškosios linijos.** Teesie kampas SON = α. Stipinu lygiu = ϱ iš punkto O kaipo centro nubrėžkim ratilą. Per punktą O praveskim diametrą OK $\perp$ į OG.

Tegu šis ratilas perkerta kampo α šonus OG, OS punktuose G ir S, o diametrą OK punkte K. Iš punkto S praveskim tiesiąją SN perpendikulerę į ON ir SC perpendikulerę į OK. Iš punktų G ir K praveskim ratilo liečiamasias TG ir KQ, kurios tesutinka šoną OS punktuose T ir Q. Stattrikampio SON katetus SN, ON pažymėkim, kaip augščiau, raidėmis *s*, *c*, jo



3 brėž.

hipotenuzė bus, OS = OG = OK = ϱ ; be to teesie linija TG = t, OT = z, KQ = k, OQ = q, tuomet iš panašių stattrikampių SON, TOG ir SOC, KOQ ir lygybių (15) gausime:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{SN}{OS} = \frac{s}{\varrho} = \sin\alpha \\
&\frac{ON}{OS} = \frac{c}{\varrho} = \cos\alpha \\
&\frac{SN}{ON} = \frac{TG}{OG} = \frac{s}{c} = \frac{t}{\varrho} = \mathrm{tang}\alpha \\
&\frac{OS}{SN = OC} = \frac{OQ}{OK} = \frac{\varrho}{s} = \frac{q}{\varrho} = \mathrm{cosec}\alpha \\
&\frac{OS}{ON} = \frac{OT}{OG} = \frac{\varrho}{c} = \frac{z}{\varrho} = \sec\alpha \\
&\frac{ON = SC}{SN = OC} = \frac{KQ}{OK} = \frac{c}{s} = \frac{k}{\varrho} = \mathrm{cotg}\alpha
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (16)$$

Prileidę, jog $OS = \varrho = 1$ iš lygybių (16) rasime:

$$\sin\alpha = s = SN,\ \cos\alpha = c = ON,\ \mathrm{tang}\alpha = t = TG,$$
$$\mathrm{cosec}\alpha = q = OQ,\ \sec\alpha = z = OT,\ \mathrm{cotg}\alpha = k = KQ.$$

Tuo budu matom, jog prie stipino $= 1$ visos šešios trigonometriškos funkcijos galima geometriškai išreikšti linijomis SN, ON, TG, OQ, OT, KQ. $SN = s$ bus trigonometriškoji sino linija, $ON = c$ — kosino linija, $TG = t$ — tangenso linija, $OT = z$ — sekanso linija, $KQ = k$ — kotangenso linija, $OQ = q$ — kosekanso linija. —

Iš tų pačių (16) form. gauname dar lygybes:

$$\left.\begin{aligned} s &= \varrho \sin\alpha, & c &= \varrho \cos\alpha, \\ s &= c\ \mathrm{tang}\alpha, & c &= s\ \mathrm{cotg}\alpha. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (16')$$

Pirmajidvi reiškia, jog kiekviename stattrikampyje statiasis katetas yra lygus hipotenuzei padaugintai priešais gulinčiojo kampo sinu, gulsčiasis katetas — yra lygus hipotenuzei padaugintai to pat kampo kosinu. Pažymime čia jiedvi tam, nes jos bus mums toliau reikalingos.

10. Trigonometriškųjų funkcijų ir linijų skirtumas. Jei mes 3-me brėžinyje, prailginę ratilo stipinus OK, OG, iš centro O nubrėžtumėm stipinu $OG' > OG$ kitą koncentriskąjį ratilą ir palikdami, tą patį kampą $= \alpha$, pravestumėm tame naujame ratile visas šešias trigonometriškas linijas $S'N' = s'$, $T'G' = t'$, $ON' = c'$, $OT' = z'$, $K'Q' = k'$, $OQ' = q'$, $OK' = OG' = \varrho'$,

(brėžinį paliekame pasidaryti pačiam skaitytojui), tai iš panašių trikampių SON, S'ON'; TOG, T'OG'; KOQ, K'OQ' rastumėm:

$$\left.\begin{aligned} \frac{s}{\varrho} = \frac{s'}{\varrho'} = \sin\alpha, \quad \frac{t}{\varrho} = \frac{t'}{\varrho'} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \frac{z}{\varrho} = \frac{z'}{\varrho'} = \sec\alpha, \\ \frac{c}{\varrho} = \frac{c'}{\varrho'} = \cos\alpha, \quad \frac{k}{\varrho} = \frac{k'}{\varrho'} = \operatorname{cotg}\alpha, \frac{q}{\varrho} = \frac{q'}{\varrho} = \operatorname{cosec}\alpha, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (17)$$

iš kur matome, jog trigonometriškos funkcijos yra nepriklausomos nuo ratilo stipino; jos visada kiekviename kampe pasilieka tos pačios ar ratilai bus nubrėžti mažesniais ar didesniais stipinais. Apie trigonometriškasias linijas to pasakyti negalima: įvairaus dydžio ratiluose jos bus nevienodos. Ir ištikrųju iš (17) gauname:

$$\left.\begin{aligned} s = \varrho \sin\alpha, \; s' = \varrho' \sin\alpha; \; t = \varrho \operatorname{tang}\alpha, \; t' = \varrho' \operatorname{tang}\alpha, \\ z = \varrho \sec\alpha, \; z' = \varrho' \sec\alpha; \\ c = \varrho \cos\alpha, \; c' = \varrho' = \cos\alpha; \; k = \varrho \operatorname{cotg}\alpha, \; k' = \varrho' \operatorname{cotg}\alpha; \\ q = \varrho \operatorname{cosec}\alpha, \; q' = \varrho' \operatorname{cosec}\alpha \end{aligned}\right\} \; . \; (18)$$

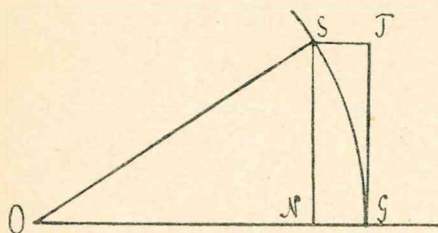
iš čia gi matome, jog prie $\varrho' > \varrho$ visos trigonometriškos linijos s', c', t', k', z' q' bus didesnės neg s, c, t, k, z, q.

Delei to ir nereikia trigonometriškųjų funkcijų laikyti per vien su trigonometriškomis linijomis; trigonometriškos linijos turi visada tam tikrą ilgį bei konkretų dydį, pareinantį nuo stipino ratilo, kuriame jos brėžiamos; trigonometriškos gi funkcijos yra tai dviejų tam tikrų trigonometriškųjų linijų santikis, visai nepriklausomas nuo tų linijų ilgio ir todel pasilieką kiekvienam kampui visada tas pats visuose ratiluose, nežiurint jų stipinų ilgio. Iš tos priežasties išreiškiantieji trigonometriškas funkcijas skaičiai visada esti abstraktųs.

Tuo budu prieiname galop išvadą, jog aplamai kalbant trigonometriškos funkcijos ir trigonometriškos linijos, — tai du visai atskiru ir nelygiu dalyku. Juodu duodas sulyginti tik ratile nubrėžtame stipinu $\varrho = 1$, nes tuomet ir trigonometriškos funkcijos ir trigonometriškos linijos duodas išreikšti tais pačiais skaičiais; bet ir čia niekad neprivalome užmiršti, jog tas pat skaičius išreikšdamas trigonometriškąją funkciją, visada pasilieka

abstraktus, o išreikšdamas trigonometriškąją liniją esti konkretus, t. y. reiškia tam tikrą ilgį, matuojamą tam tikru ilgio mastu.

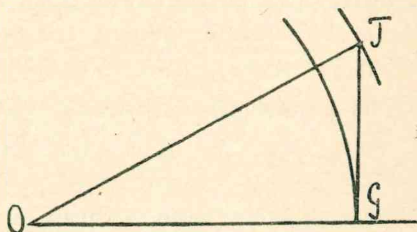
11. Trigonometriškieji dydžiai. Trigonometriškosios linijos ir funkcijos bendrai vadinama trigonometriškais dydžiais. Kiekvienas trigonometriškųjų dydžių nustato atitinkantį jam kampą. Pav. žinant, jog tam tikro kampo α sinas yra lygus $^2/_3$ (kas išreiškiama lygybe: $\sin\alpha = {}^2/_3$), lengva tasai kampas nubrėžti. Tam tikslui vedam by kokią tiesiąją OG ir iš by kokio jos punkto O (žiur. 4 brėž.) stipinu OG brėžiame lanką; iš punkto G vedame perpendikulerą TG lygų $^2/_3$ OG; iš punkto T brėžiame TS || OG ir tosios TS su lanku persikirtimo punktą S jungiame su O; tuomet kampas SOG ir lankas SG bus tie, kurių ješkoma, nes jų sinas ir bus lygus $^2/_3$.



4 brėž.

Jei reikėtu nubrėžti kampas, turint tam tikrą kosiną (pav. $= {}^1/_4$), tai nubrėžus iš punkto O stipinu OG lanką ir paėmus atrėžą ON lygų $^1/_4$ OG, reiktu iš punkto N vesti perpendikuleras į OG lig jam persikirsiant su lanku punkte S; sujungę punktą S su O, gautumėm ješkomąjį kampą.

Turint tam tikrą tangensą (pav. lygų 1) irgi lengva surasti jam atitinkąs kampas bei lankas. Tam tikslui užtenka iš punkto G išvesti perpendikuleras į OG (žiur. 5 brėž.) ir paimti jame atrėžą TG lygų OG ir sujungti punktą T su O.



5 brėž.

Turint duotajį sekansą (pav. $= 1^1/_3$) atitinkantis jam kampas nubrėžiama šitaip: nubrėžę stipinu OG lanką, iš punkto

G vedame perpendikulerą TG į OG; paskui stipinu OT lygiu $1^1/_3$ OG brėžiame iš O lanką, perkertantį pravestąjį perpendikulerą punkte T; sujungę šį punktą T su centru O, gausime kampą, kurio sekansas bus lygus $1^1/_3$ (ž. 5. brėž.).

Taip pat nesunku nubrėžti kampas ir turint duotąjį kotangensą bei kosekansą.

12. Trigonometriškųjų dydžių savitarpio santikiai. Peržiurėkim to pat lanko bei kampo trigonometriškųjų dydžių savitarpio santikiavimus. Tam tikslui imkim stattrikampį SON (ž. 3. brėž.). Iš jo gauname: $SN^2 + ON^2 = OS^2$. Padalinę šią lygybę stipino OS kvadratu, ir turėdami omenėje (16) lygybes rasime:

$$\frac{SN^2}{OS^2} + \frac{ON^2}{OS^2} = 1 \text{ arba } \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Iš panašių gi trikampių SON ir TOG gauname:

$$\frac{TG}{SN} = \frac{OG}{ON}; \quad \frac{OT}{OS} = \frac{OG}{ON}$$

Padalę tų santikių skaitiklius ir vardiklius tuo pačiu dydžiu OG gausime:

$$\frac{TG : OG}{SN : OG} = \frac{1}{ON : OG} \text{ arba } \frac{\text{tang}\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}; \text{ iškur } \text{tang}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (20)$$

$$\frac{OT : OG}{OS : OG} = \frac{1}{ON : OG} \text{ arba } \frac{\sec\alpha}{1} = \frac{1}{\cos\alpha}; \text{ iškur } \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad (21)$$

Iš stattrikampio TOG turime: $OT^2 = TG^2 + OG^2$; padalę tą lygybę OG kvadratu, gausime:

$$\frac{OT^2}{OG^2} = \frac{TG^2}{OG^2} + \frac{OG^2}{OG^2} \text{ arba } \sec^2\alpha = \text{tang}^2\alpha + 1 \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Iš panašių stattrikampių OKQ ir OSC turime:

$$\frac{KQ}{SC} = \frac{OK}{OC}; \quad \frac{OQ}{OK} = \frac{OS}{OC}$$

iš kur tuo pačiu keliu, kaip augščiau, rasime:

$$\frac{KQ : OG}{SC : OG} = \frac{OK : OG}{OC : OG} \text{ arba } \frac{\text{cotg}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}; \text{ iškur } \text{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad . \quad (23)$$

$$\frac{OQ : OG}{OK : OG} = \frac{OS : OG}{OC : OG} \text{ arba } \frac{\text{cosec}\alpha}{1} = \frac{1}{\sin\alpha}; \text{ iškur } \text{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \quad (24)$$

Galop iš to pat stattrikampio KOQ turimė: $OQ^2 = KQ^2 + OK^2$; iš kur dalydami abi lygybės dali stipino OK kvadratu rasime:

$$\frac{OQ^2}{OK^2} = \frac{KQ^2}{OK^2} + \frac{OK^2}{OK^2} \text{ arba } \operatorname{cosec}^2\alpha = \operatorname{cotg}^2\alpha + 1 \quad (25)$$

Padauginę lygybę (20) ir (23) viena antra, rasime:

$$\operatorname{tang}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \sin\alpha} = 1, \text{ iš kur } \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tang}\alpha} \quad (26)$$

Lygybės (19), (20), (21), (22), (23), (24), (25) ir (26) pildosi kiekviename kampe ir todel yra trigonometriškos tapatybes bei identiškumai.

13. Trigonometriškųjų linijų savitarpio santikiai. Jei trigonometriškasias funkcijas lygybėse nuo (19) lig (26) išreikštumėm joms atitinkančiais trigonometriškųjų linijų santikiavimais paimtais iš (16), tai rastumėm šiuos trigonometriškųjų linijų savitarpio santikius:

$$\frac{s^2}{\varrho^2} + \frac{c^2}{\varrho^2} = 1 \text{ arba } s^2 + c^2 = \varrho^2 \quad \ldots \quad (19')$$

$$\frac{t}{\varrho} = \frac{s}{\varrho} : \frac{c}{\varrho} \text{ arba } t = \varrho\frac{s}{c} \quad \ldots \quad (20')$$

$$\frac{z}{\varrho} = 1 : \frac{c}{\varrho} \text{ arba } z = \frac{\varrho^2}{c} \quad \ldots \quad (21')$$

$$\frac{z^2}{\varrho^2} = \frac{t^2}{\varrho^2} + 1 \text{ arba } z^2 = t^2 + \varrho^2 \quad \ldots \quad (22')$$

$$\frac{k}{\varrho} = \frac{c}{\varrho} : \frac{s}{\varrho} \text{ arba } k = \varrho\frac{c}{s} \quad \ldots \quad (23')$$

$$\frac{q}{\varrho} = 1 : \frac{s}{\varrho} \text{ arba } q = \frac{\varrho^2}{s} \quad \ldots \quad (24')$$

$$\frac{q^2}{\varrho^2} = \frac{k^2}{\varrho^2} + 1 \text{ arba } q^2 = k^2 + \varrho^2 \quad \ldots \quad (25')$$

$$\frac{k}{\varrho} = 1 : \frac{t}{\varrho} \text{ arba } k = \frac{\varrho^2}{t} \quad \ldots \quad (26')$$

Iš čia matom, jog trigonometriškųjų linijų santikiavimai nėra identiški trigonometriškųjų funkcijų santikiavimams; jie virsta identiškais tik prie $\varrho = 1$.

14. Pakeitimas vienų trigonometriškųjų funkcijų kitomis. Naudojantis formulomis nuo (19) lig (26) galima be vargo kiekviena trigonometriškoji funkcija išreikšti kitomis. Pav. sinu kitos trigonometriškosios funkcijos išreiškiama šiomis formulomis:

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha},\ \tan g\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}},\ \sec\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}},$$

$$\cot g\alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha},\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Prileiskim dar, kad tanga $= n$ ir pabandykim visas trigonometriškas to kampo funkcijas išreikšti dydžiu n. Tai pigiai padaroma, nes turime:

$$\cot g\alpha = \frac{1}{\tan g\alpha} = \frac{1}{n};\quad \sec\alpha = \sqrt{1 + \tan g^2\alpha} = \sqrt{1 + n^2};$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{1 + \cot g^2\alpha} = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\frac{n^2+1}{n}};\ \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+n^2}};\ \sin\alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha} = 1 : \sqrt{\frac{n^2+1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \quad . \quad (28)$$

15. Atverstinės trigonometriškos funkcijos. Kiekvienas trigonometriškasis dydis, kaip jau augščiau esam matę, mainosi mainantis kampo bei lanko dydžiui, ir todel yra kampo bei lanko funkcija. Taigi pažymėję kampo bei lanko dydį raide x, o trigonometriškasias funkcijas raide y, galėsime jas išreikšti šiais šešiais lyginiais:

$$\left.\begin{array}{l} y = \sin x,\ y = \tan g\, x,\ y = \sec x \\ y = \cos x,\ y = \cot g\, x,\ y = \operatorname{cosec} x \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Vadinas, jei kampo bei lanko x dydis bus žinomas, tai iš (29) lyginių mes surasime ir tojo kampo bei lanko trigonometriškųjų funkcijų dydį y.

Bet jei trigonometriškųjų funkcijų dydis y prileidžiama žinomu ir ieškoma atitinkančiojo joms kampo bei lanko dydis x, tai šis uždavinys išreiškiama pasigaunant naujo simbolio, butent:

$$\left.\begin{array}{l} x = \operatorname{arc}\sin y;\ x = \operatorname{arc}\tan g\, y;\ x = \operatorname{arc}\sec y; \\ x = \operatorname{arc}\cos y;\ x = \operatorname{arc}\cot g\, y;\ x = \operatorname{arc}\operatorname{cosec} y \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (30)$$

Skaitant (30) lyginiai lietuviškai galima tarti: x yra lygus y-ko arkui sinui, arkui tangensui ir tt. Tai reiškia, jog dydis lanko, kurio sinas, kosinas, tangensas ir tt. yra lygus y-kui, bus lygus x-ui. Funkcijos arcsinx, arctangx ir tt. vadinas trigonometriškųjų atverstinės bei ratilinės.

16. Trigonometriškųjų ir ratilinių funkcijų pavadinimai. Jie yra imti iš latinų kalbos, nes lig XX a. prasidedant, mokslo knygos daugiausia buvo rašomos latinų kalba. Susidarė gi jie šitokiu budu: sinas SN, kaip parodo 6 brėžinys, yra pusė chordos SS′, jungiančios galus lanko SGS′ dvigubai didesnio neg lankas SG. Latiniškai pusė chordas vadinosi semi recta inscripta arba trumpiau semi inscripta. Sutrumpintu budu tuodu žodžiu iš pradžių rašydavo *s. ins.*, paskui *sins* ir galop *sinus*. Sekanso ir tangenso vardai yra kylę iš žodžių *secans*, kurs reiškia kertamoji ir *tangens*, kurs reiškia liečiamoji. Kadangi du lanku bei kampu, kurių suma sudaro lanką bei kampą turintį 90^0, vadinas vienas antrą papildančiais bei papildymais, tatai lankas KS $= 90^0 - SG$ bus lanko SG papildymas[1]. Jei nun prileisime punktą K lanko KS pradžia, tai SN′ bus sinas, KQ — tangensas, OQ sekansas. Bet SN′ = ON, t. y. SN′ yra papildymo sinas, latiniškai *sinus complementi* arba sutrumpintoj formoj *co sinus*. Iš to pat brėžinio matome, jog kampo α kotangensas KQ yra papildymo tangensas *tangens complementi* — *co tangens* ir to pat α kampo kosekansas OQ yra *secans complementi* — *co secans*. Galop simbolis *arc* yra kilęs iš lat. žodžio *arcus*, kurs reiškia lanką.

6 brėž.

[1]) Kampo papildymą mes patartumėm vadinti sankampiu.

Uždaviniai:

1. Sudaryti kampas, kurio $\sin = 1/2$? $2/3$? 1? 0? $1\,1/2$?
2. Sudaryti kampas, kurio $\cos = 1/4$? 0? 1? 2?
3. Sudaryti arctang $3/4$? 0? 1? 3?
4. Sudaryti arc cosec $1\,3/4$? 1? $1/2$? arc cosec $1\,2/5$? arc cotg $3/5$.
5. Parodyti, kad kiekvienam kampe sec yr didesnis neg tang? cosec didesnis neg cotg?
6. Apskaityti $\sin x$, $\cos x$ .... prileidžiant kad $\operatorname{tang} x = 3/4$?
7. Išreikšti visas trigonometriškas funkcijos vienu cos? vienu sec?
8. Išreikšti visas trigonometriškas funkcijas vienu cosec? vienu cotg?
9. Duota kampas α; sudaryti arc sin $2\sin\alpha$? arc tang 3α?
10. Surasti cosec arc tang 2?
11. Išreikšti gradais, minutėmis ir sekundomis kampai, kurių lankai yra lygūs: a) $\frac{2\pi}{5}$, b) $\frac{3\pi}{7}$, c) 0, 567, d) $\frac{5\pi}{12}$, e) 1, 234, imant $\pi = 3,14159$.
12. Kampų: a) $23^0 17' 26'',3$, b) $53^0 28' 30'',15$, c) $18^0 43' 26'',3$ lankai išreikšti ratlankio dalimis.
13. Surasti kampo α trigonometriškos funkcijos, jei: a) $\sin\alpha = 0,8$, b) $\operatorname{tang}\alpha = 2,4$, c) $\cos\alpha = 0,28$, d) $\sin\alpha = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a}}$ e) $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{m+n}{m-n}$.
14. Padaryti pareinamais vien nuo $\sin\alpha$ reiškiniai: a) $\operatorname{cotg} + 1 \frac{\sin\alpha,}{+\cos\alpha}$ b) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha$.
15. Pasigaunant funkcijos cosa išreikšti šie reiškiniai: a) $(\operatorname{cosec} a - \operatorname{cotg} a)^2$, b) $\operatorname{cosec} a\,(\operatorname{tang} a + \operatorname{cotg} a)$.
16. Pasigaunant funkcijos tanga išreikšti šie reiškiniai: a) $\sec a + \sec a \operatorname{cosec} a\ (\cos^2 a - \sin a)$, b) $(1 - \sin a \cos a)(1 + \sin a \cos a) - \operatorname{cotg}^2 a.\ \sin^2 a$.
17. Patikrinti formulos: $\frac{\sin a + \operatorname{tang} a}{\operatorname{cotg} a + \operatorname{cosec} a} = \sin a.\ \operatorname{tang} a$.

18. $\frac{\text{tangx} + \text{tangy}}{\text{cotgx} + \text{cotgy}} = \text{tangx. tangy}.$

19. $\frac{\text{sina} - \text{sinb}}{\text{cosa} + \text{cosb}} = \frac{\text{cosb} - \text{cosa}}{\text{sina} + \text{sinb}}.$

20. $\frac{\text{sina} + \text{cosa}}{\text{seca} + \text{coseca}} = \text{sina. cosa}.$

21. $\text{tangx} = \frac{\text{secx}}{\text{cosex}}.$

22. $\left(\frac{\text{siny} + \text{tangy}}{\text{cosecy} + \text{cotgy}}\right)^2 = \frac{\text{sin}^2\text{y} + \text{tang}^2\text{y}}{\text{cosec}^2\text{y} + \text{cotg}^2\text{y}},$

23. $\frac{\text{sin}^3\text{x}}{\text{cosx} - \text{cos}^3\text{x}} = \text{tangx}.$

24. $(\sin 60^0 - \sin 45^0)(\cos 30^0 + \cos 45^0) = \sin^2 30^0.$

25. $(\sin 30^0 + \cos 30^0)(\sin 60^0 - \cos 60^0) = \cos 60^0.$

26. sina. cosa. tanga. cotga. seca. coseca = 1.

27. Žinant, jog sina = cos $(90^0 - a)$, surasti visi trigonometriški dydžiai kampo 45^0.

28. Surasti visi trigonometriški dydžiai lanko

$$\text{arc cosec}\left(\frac{m + n}{m - n}\right)?$$

29. Duota kampas α; sudaryti kampas β taip, kad $\sin\beta = 3 \cos\alpha$? $\cos\beta = \frac{1}{4} \cos\alpha$?

30. Dviejų kampų sinų suma = $1\frac{1}{2}$; sinų santikiavimas = 2. Surasti tų kampų suma?



II Skirsnys.

Trigonometriškųjų dydžių mainymasis, mainantis kampui bei lankui nuo 0° lig 360° ir toliau.

17. **Mainymasis trigonometriškųjų dydžių kampuose nuo 0^0 lig 90^0.** Praeitame skirsnyje mes susipažinom su šešiomis trigonometriškomis funkcijomis: sinu, kosinu, tangensu, kotangensu, sekansu ir kosekansu. Nustatėm ir jų santikiavimus kampuose mažesniuose neg 90^0. Bet, kaip žinom, kampai bei lankai gal didėti nuo 0^0 lig 360^0 ir toliau. Taigi žinotina, kuo virsta tos trigonometriškosios funkcijos kampuose didesniuose neg 90^0.

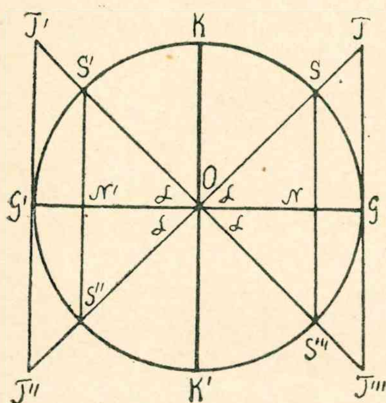
Tam tikslui imkim ratilą nubrėžtą stipinu OG (7 brėž.) ir paėmę kokį jo punktą G lankų pradžia, praveskim per jį diametrą (skersinį) GG', sudarykim by kokį kampą SOG $= \alpha$ ir praveskim perpendikulerus SN ir TG. Tuomet $\frac{SN}{OG} = \sin\alpha$, $\frac{ON}{OG} = \cos\alpha$, $\frac{TG}{OG} = \text{tang}\,\alpha$. Jei mažinsime kampą α, artindami punktą S prie G, tai atrėžai SN ir TG ims mažėti, atrėžas ON ims didėti, o stipinas OG pasiliks nemainomas; vadinas kampui mažėjant, jo sinas ir tangensas taipgi mažėja, o kosinas eina didyn. Kampui α ir lankui SG virtus zeru, punktai S ir T sutaps su G, ir todel atrėžai SN ir TG taipogi virs zeru, o atrėžas ON virs OG. Vadinas

$$\sin 0^0 = \frac{0}{1} = 0,\ \cos 0^0 = \frac{1}{1} = 1,\ \text{tang}\ 0^0 = \frac{0}{1} = 0\quad .\ .\ .\quad (31)$$

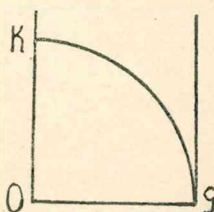
Jei, užuot kampą α mažinus, imtumėm jį didinti, tai jo sinas ir tangensas imtu didėti, o kosinas mažėti. Kampui α tapus statkampiu, atrėžas SN sutaptu su stipinu OK, o atrėžas ON virstu zeru. Taigi

$$\left.\begin{aligned}\sin 90^0 = \sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} = 1;\ \cos 90^0 = \cos\frac{\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0,\\ \operatorname{tang} 90^0 = \operatorname{tang}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{0} = \infty\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Ir ištikrųjų tangensas yra tai liečiamosios atrėžo TG santikis su stipinu; bet statkampyje ši liečiamoji yra antram kampo šonui paralėlė (ž. 8 brėž.) ir todel negal jo perkirsti.



7 brėž.



8 brėž.

18. **Mainymasis trigonometriškųjų dydžių kampuose nuo 90⁰ lig 180⁰.** Nun, prileiskim, kad kampas ims dar daugiau didėti, taip kad punktas S perėjęs per punktą K, atsiras padėjime S′; jei kampas S′OG′ = SOG = α, tai kampas S′OG bus = $180^0 - \alpha$. Norint nustatyti to kampo siną, reikia iš atitinkančio jam lanko S′G galo S′ nuleisti perpendikuleras S′N′ į prailgintąjį stipiną OG; santikis S′N′ su stipinu OG ir bus sin $(180^0 - \alpha)$; iš 7 brėžinio matome, kad S′N′ = SN, ON′ = ON, vadinas $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$; $\cos(180^0 - \alpha) = \cos\alpha$. Bet čia kila klausimas, kaip atskirti smailakampis α nuo kėstakampio $180^0 - \alpha$, jei jų sinai ir kosinai yra lygųs. Tam tikslui reikia atkreipti domė ne tiktai į sino bei kosino dydį, bet ir į geometriškąjį atrėžų S′N′ ir ON′ padėjimą. Tasai padėjimas žymima jiems atitinkančiais ženklais, butent atrėžai ON dešinėn nuo

punkto O laikoma teigiamaisiais ir žymima + ON, o kairėn nuo nuo punkto O laikomi neigiamaisiais ir žymima: — ON'. Taip pat atrėžai SN, S'N' augštyn nuo diametro (skersinio) laikomi teigiamaisiais ir žymima + SN, + S'N', o atrėžai S''N', S'''N žemyn nuo diametro laikomi neigiamaisiais ir žymima: — S''N', — S'''N.

Turėdami tai omenyje grįžkime prie kampo $180^0 - \alpha$ kosino (7 brėž.). Matom, jog nors atrėžas ON' = ON, bet jų dviejų padėjimas yra vienas antram priešingas, taigi, jei ON imame teigiamuoju su ženklu +, tai atrėžas ON' reikia laikyti priešingu bei neigiamuoju ir imti su ženklu —; todel jei $\frac{+ON}{OG} = \cos\alpha$, tai $\frac{-ON'}{OG} = -\cos\alpha$. Atrėžas ON yra dviejų atrėžų OG ir NG liekana bei skirtumas. Pastarasis iš jų NG, mainantis kampui, mainos taja pačia prasme (t. y. kampui didėjant — didėja ir mažtant — mažta), o pirmasis — stipinas lieka nemainomu; kol $\alpha < 90^0$, NG yra mažesnis neg stipinas, vadinas ON bus teigiamasis dydis; prie $\alpha = 90^0$ NG virsta stipinu, o $\cos\alpha$ — zeru; jei $\alpha > 90^0$, tai NG > už stipiną (pav. kampe S'OG jis bus lygus N'G), taigi mažintojas čia yra didesnis neg mažinamasis, per tai ir liekana daros neigiamoji. Tuo budu —

$$\left.\begin{aligned} \sin(180^0 - \alpha) &= \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \\ \cos(180^0 - \alpha) &= \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

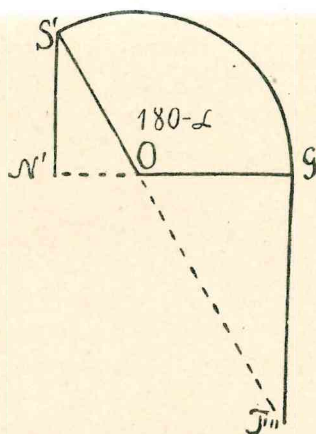
taigi

$$\operatorname{tang}(180^0 - \alpha) = \operatorname{tang}(\pi - \alpha) = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\operatorname{tang}\alpha \quad (34)$$

Ir ištikrųjų, norint gauti kampo $180^0 - \alpha$ tangensas, reikia (žiur. 9 brėž.) punkte G pravesti liečiamoji lig susitiksiant su prailgintuoju stipinu S'O; šią liečiamąją turime vesti žemyn, nes kitaip ji su stipinu nesusitiktu, ir todel atrėžas T'''G turės padėjimą priešingą tam, kokį jis buvo turėjęs kampe α (žiur. 7 brėž.); delei to ir tang $(180 - \alpha)$ reikia laikyti neigiamuoju dydžiu.

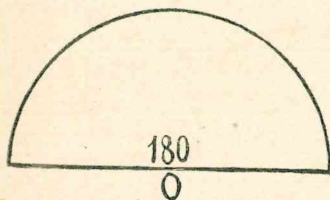
Prileiskim toliau, kad kampas didėja dar daugiau ir virsta 180⁰ (10 brėž.); tuomet jo sinas ir tangensas virsta zeru, o kosinas daros lygus stipinui = 1; bet čia kosinas turi padėjimą priešingą, tam, kokį jis turėjo kampe 0^0, ir todel turime:

$$\sin 180^0 = \sin \pi = 0; \quad \cos 180^0 = \cos \pi = -1, \quad \operatorname{tang} \pi = 0 \quad . \quad (35)$$

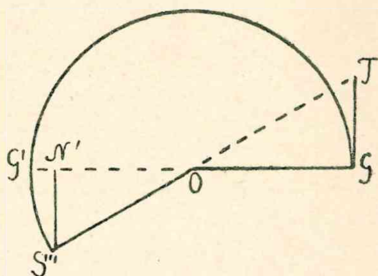


9 brėž.

19. Mainymasis trigonometriškųjų dydžių kampuose nuo 180⁰ lig 270⁰. Prailginę liniją SO lig punktui S″ (7 brėž.), gausim kampą GOS″ = $180^0 + \alpha$; jo sinas (ž. 11. brėž.) bus S″N′ : OG, o



10 brėž.



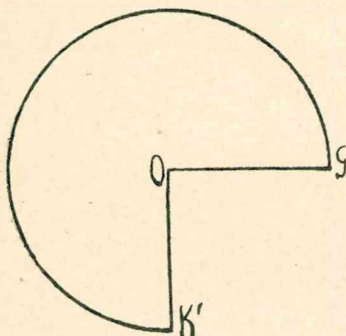
11 brėž.

kosinas ON′ : OG, t. y. tokie pat, kaip ir kampe α; bet kadangi S″N′ turi dabar padėjimą visai priešingą tam, kokį turėjo kampe SOG (ž. 7 brėž.), o atrėžas ON′ yra taipgi neigiamasis, tai

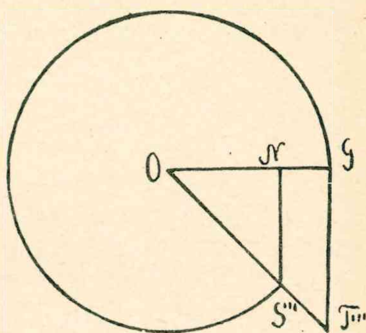
$$\left.\begin{aligned} \sin(180^0+\alpha) &= \sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha; \\ \cos(180^0+\alpha) &= \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha; \\ \mathrm{tang}(180^0+\alpha) &= \mathrm{tang}(\pi+\alpha) = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \mathrm{tang}\,\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots (36)$$

Iš 11 brėž. matome, kad tang čia ir privalo buti teigiamasis, nes liečiamosios atrėžas turi čia tokį pat padėjimą, kaip ir kampe $SOG = \alpha$.

Didindami toliau kampą, gausime kampą 270^0 (ž. 12 brėž.),



12 brėž.



13 brėž.

jame $\sin 270^0 = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$; cos virsta zeru; bet kadangi trečioj ratilo ketvirtyj kosinai buna neigiamieji, tai $\cos 270^0 = \cos \frac{3\pi}{2} = -0$; $\mathrm{tang}\, 270^0 = \mathrm{tang} \frac{3\pi}{2} = \frac{-1}{-0} = +\infty$, kas ir privalo but, nes perpendikuleras išvestas iš punkto G (12 brėž.) nesusitiks su prailgintuoju stipinu OK'; o kadangi trečioj ratilo ketvirtyj tangensai yra teigiamieji, tatai ir tang. 270^0 privalo buti teigiamasis.

20. Mainymasis trigonometriškųjų dydžių kampuose nuo 270^0 lig 360^0 ir toliau. Eidami galop paskutinėn ratilo ketvirtin, prailginkim liniją S'O. lig S''' (7 brėž.), tuomet gausim kampą $GOS''' = 360^0 - \alpha = 2\pi - \alpha$; jo funkcijos bus:

$$\left.\begin{aligned} \sin(360^0-\alpha) &= S'''N : OG^{1)} = -\sin\alpha \\ \cos(360^0-\alpha) &= ON : OG = \cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (37)$$

---

[1]) Ž. 13. brėž.

$$\text{tang}\,(360^0 - \alpha) = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\text{tang}\,\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

Punktui S‴ sutapus su G, gausime kampą lygų keturiem statkampiams; atitinkąs jam lankas virs ištisu ratilu; to lanko sinas ir tangensas taps zeru, o kosinas = stipinu; taigi —

$$\left.\begin{array}{l} \sin 360^0 = \sin 2\pi = 0,\ \cos 360^0 = \cos 2\pi = 1, \\ \text{tang}\, 360^0 = \text{tang}\, 2\pi = 0 \end{array}\right\} \ldots \quad (38)$$

Jei dar toliau bedidinant kampą, punktas S‴ nuo G pereitu į S (ž. 7 brėž.), tai susidarytu kampas $360^0 + \alpha = 2\pi + \alpha$, kurio trigonometriškos linijos ir funkcijos butu tos pat, ką ir kampo α, t. y.

$$\left.\begin{array}{l} \sin\,(360^0 + \alpha) = \sin\,(2\pi + \alpha) = \sin\alpha \\ \cos\,(360^0 + \alpha) = \cos\,(2\pi + \alpha) = \cos\alpha, \\ \text{tang}\,(360^0 + \alpha) = \text{tang}\,(2\pi + \alpha) = \text{tang}\,\alpha \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (39)$$

Ir aplamai prikergus lankui α^0 dar by kiek ratilų bei sietos pusratilių skaičių, trigonometriškieji to lanko dydžiai nesimaino, taip kad:

$$\left.\begin{array}{l} \sin\,(2n.\,180^0 + \alpha) = \sin\,(2n\,\pi + \alpha) = \sin\,\alpha \\ \cos\,(2n.\,180^0 + \alpha) = \cos\,(2n\,\pi + \alpha) = \cos\,\alpha \\ \text{tang}\,(2n.\,180^0 + \alpha) = \text{tang}\,(2n\,\pi + \alpha) = \text{tang}\,\alpha \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (40)$$

Iš čia nesunku suprasti, jog prikergus kokiam lankui likos pusratilių skaičių, trigonometriškieji to lanko dydžiai bus tokie pat, kaip lanko $180^0 + a$. Ir ištikrųjų:

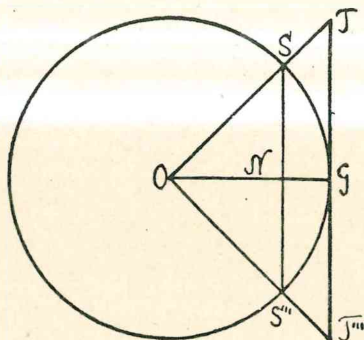
$$\left.\begin{array}{l} \sin\,[(2n+1).\,180^0 + \alpha] = \sin\,[(2n+1)\,\pi + \alpha] = \\ \sin\,[2n.\,180^0 + 180^0 + \alpha] = \sin\,(180^0 + \alpha) = -\sin a \end{array}\right\} \ldots \quad (41)$$

Panašiai rasim, jog

$$\left.\begin{array}{l} \sin\,(2n.\,180^0 - \alpha) = \sin\,(n.\,360^0 - \alpha) = \sin\,(360^0 - \alpha) = -\sin\alpha \\ \sin\,[(2n+1).\,180^0 - \alpha] = \sin\,(180^0 - \alpha) = \sin\alpha \end{array}\right\} \quad (42)$$

21. **Mainymasis trigonometriškųjų dydžių neigiamuose kampuose.** Jei kokiam ratile nuo punkto G abišaliai atkirstumėm lygius lankus S′G ir S‴G (14 brėž.) ir sudarytumėm kampus SOG ir S‴OG, tai prileidę pirmutinį esant lygų α, antras, kaipo turįs priešingą padėjimą, bus $= -\alpha$; pravedę perpendikulerus TT‴ ir SS‴, rastumėm, jog SN = S‴N ir TG = T‴G, bet abiejuose atvejuose jie turi vienas antram priešingą padėjimą; tik ON yra abiem bendras; taigi iš čia matome, jog

$$\left.\begin{array}{l}\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha,\\ \tan g(-\alpha) = -\tan g\,\alpha\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (43)$$



14 brėž.

22. Trigonometriški dydžiai kampuose $90^0 + \alpha$ ir $270^0 \pm \alpha$. Peržiurinėdami trigonometriškųjų dydžių mainymąsi ratile, mes praleidėme sino, kosino ir tangenso dydžius lankams $90^0 + \alpha$ ir $270^0 \pm \alpha$, delto, kad tiems lankams galima priduoti išvaizdą lankų $180^0 \mp \alpha$; ir ištikrųjų:

$$\sin(90^0 + \alpha) = \sin(180^0 - 90^0 + \alpha) = \sin[180^0 - (90^0 - \alpha)] = \sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(90^0 + \alpha) = \cos[180^0 - (90^0 - \alpha)] = -\cos(90^0 - \alpha) = -\sin\alpha.$$

$$\tan g(90^0 + \alpha) = \tan g[180^0 - (90^0 - \alpha)] = -\tan g(90^0 - \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$$

$$\sin(270^0 - \alpha) = \sin(180^0 + 90^0 - \alpha) = -\sin(90^0 - \alpha) = -\cos\alpha.$$

$$\sin(270^0 + \alpha) = -\sin(90^0 + \alpha) = -\cos\alpha \quad . \quad . \quad (44)$$

Panašiu budu randama ir cos bei tang kampo $270 \pm \alpha$.

Kotangenso, sekanso ir kosekanso mainymasis lengva išvesti iš formulų: $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\tan g\,\alpha}$, $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$, $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$, žinant mainymąsi sino, kosino ir tangenso.

Visi šie mainymaisi kruvon sutraukti galima matyti žemiau ďedamoje lentelėje: . . . . (45)

Lankai	sin	cos	tang	cotg	sec	cosec
0	0	1	0	∞	1	∞
90^0	1	0	∞	0	∞	1
$180^0 - \alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\operatorname{tang}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$-\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$
180^0	0	-1	-0	$-\infty$	-1	∞
$180^0 + \alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\operatorname{tang}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$
270^0	-1	-0	∞	0	$-\infty$	-1
$360^0 - \alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tang}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$\sec\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$
360	-0	1	-0	$-\infty$	1	$-\infty$
$360^0 + \alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tang}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tang}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$\sec\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$

Iš šios lentelės matome, jog sinai ir kosekansai yr teigiami I ir II ratilo ketvirty, neigiami III ir IV; kosinai ir sekansai yr teigiami I ir IV, neigiami II ir III ketvirty; tangensai ir kotangensai yr teigiami I ir III, neigiami II ir IV ketvirty.

23. **Budas didesnių neg 90^0 kampų funkcijomis išreikšti mažesnių neg 90^0 kampų funkcijomis.** Remiantis tuo, kas augščiau pasakyta, lengva parodyti, kad kiekvieno kampo bei lanko trigonometriškieji dydžiai galima išreikšti mažesnio neg 90^0 kampo bei lanko trigonometriškais dydžiais. Imkim pav. lanką 2047^0; padalę 2047^0 360-mis, rasime, jog lankas $2047^0 =$ 5 ratilams $+ 247^0$; todel $\sin 2047^0 = \sin 247^0 = \sin (180^0 + 67^0)$ $= - \sin 67 = - \sin (90^0 - 23^0) = - \cos 23^0$. Panašiu budu $\text{cotg} (- 1568^0) = - \text{cotg } 1568^0 = - \text{cotg } 128^0 =$ $- \text{cotg } (180^0 - 52) = - (- \text{cotg } 52^0) = \text{cotg } 52^0 = \text{tang } 38^0$.

24. **Budas išreikšti lankams, atitinkantiems trigonometriškoms duotojo dydžio funkcijoms.** Kaip jau esam augščiau (9 §) matę, kiekvienas lankas teturi tik po vieną *sin, cos, tang* . . . ; tuo budu, jei esama lyginių eilės: $y = \sin x$, $z = \cos x$, $u = \text{tang}\, x$. . . ir x prileidžiama juose žinomu, tai aišku, jog kiekvienas tų lyginių teturės tik po vieną išgvaldymą. Bet kadangi tas pats *sin, cos, tang* gali atitikti daugybei lankų, tatai lyginiai $x = \text{arcsin}\, y$, $x = \text{arccos}\, z$, $x = \text{arctang}\, u$ turės daugybę išgvaldymų. Pav. jei $\sin 30^0 = 1/2$, tai bus ir $\sin 150^0 = 1/2$ ir $\sin 510^0 = 1/2$ ir tt.; aplamai, jei kokio lanko a sinas turės dydį b, tai tam sinui atitiks taipgi lankai $2\,n.\, 180^0 + a$ ir $(2\,n. + 1)\, 180^0 - a$, taip jog galima bus pažymėti lygybė:

$$b = \text{arcsin}\, a = \text{arcsin}\, (2\,n.\, 180^0 + a) = \text{arcsin}\, [(2\,n. + 1).\, 180^0 - a] \quad . . . \quad (46)$$

Jei b butu lanko a ne sinas, bet kosinas ar tangensas, tai galėtumėm gauti panašiu kitu dvi lygybi, butent:

$$b = \text{arccos}\, a = \text{arccos}\, (2\,n.\, 180^0 + a) = \text{arccos}\, (2\,n.\, 180 - a) \quad (47)$$

$$b = \text{arctang}\, a = \text{arctang}\, (n.\, 180^0 + a) \quad . . . \quad (48)$$

Lankai lygiais kosekansais bus besantikiuoją taip pat, kaip lankai lygiais sinais, lankai lygiais sekansais santikiuos kaip

lankai lygiais kosinais, galop lankai lygiais kotangensais santikiuos kaip lankai lygiais tangensais. Todel pav. jei cos $x = -1$, tai x gali but lygus vienam, trims . . . ir aplamai likos pusratilių skaičiui, taip kad bendro lanko x, patenkinančio lyginį cos $x = -1$ išvaizda bus: $\arccos(-1) = \arccos[(2n. + 1). 180^0]$.

Iš geometrijos žinoma, jog ratlankio ilgis $= 2\pi r$; o jei $r = 1$, tai ratlankio ilgis $= 1\pi$; vadinas, π išreiškia pusratilio ilgį prie stipino $= 1$, todel lankui kosinu $= -1$ galima priduoti dar ši bendra išvaizda: $\arccos(-1) = \arccos[(2n. + 1)\pi]$.

Praktikoje ratilinių funkcijų dydžiai imama prasčiausieji, butent arcsin, arctang, arccotg ir arccosec ribose nuo $-\frac{\pi}{2}$ lig $\frac{\pi}{2}$ o arccos ir arcsec ribose nuo O lig π; prireikus gi pažymėti, jog tų ratilinių funkcijų paimta visi jiems atitinkantieji dydžiai, pažymima šis skirtumas ir pačiame jų simbole arc, pakeičiant jame pirmutinę mažają raidę *a* didžiaja A; tuo budu, pav. rašoma:

$$\text{arc sin } 1/2 = \frac{\pi}{6}; \quad \text{Arc sin } 1/2 = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{arc cos } (-1/2) = \frac{-2\pi}{3}; \quad \text{Arc cos } (-1/2) = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

ir tt.

Uždaviniai:

31. Surasti sin, cos, tang šių lankų: 142^0? 218^0? 232^0? 380^0? 322^0? 938^0? 1478^0? -225^0? -570^0? $\frac{8}{5}\pi$? $11\,1/3\,\pi$? $-7\,2/3\,\pi$?
32. Surasti sin, cos, tang lanko $(2n + 1)\, 180^0 + x$?
33. Surasti arc sin (± 1)?
34. Surasti arc sin $(-1/2)$, žinant, jog sin $30^0 = \frac{1}{2}$?

35. Parodyti teisingumas formulų: $\sin x = \sin [(2n+1)\ 180^0 - x] = - \sin [(2n+1).\ 180^0 + x] = - \sin [(2n+2).\ 180^0 - x]$.

36 Parodyti teisingumas formulos: $\sin x + \cos x + \operatorname{tang} x - \sec x = 0$ prie $x = 180^0\ n$?

37. Surasti sin, cos, tang, sec, cosec šių lankų: $(4n+1)\frac{\pi}{2} + \alpha$? $(4n+2)\ \frac{\pi}{2} + a$? $(4n+3)\ \frac{\pi}{2} + a$? $(4n+1)\ \frac{\pi}{2}$? $(4n+2)\ \frac{\pi}{2}$? $(4n+3)\ \frac{\pi}{2}$?

Apskaityti reiškiniai:

38. $a \sin 0^0 + b \cos 90^0 - c \operatorname{cotg} 180$?

39. $a \cos 90^0 - b \operatorname{tang} 180^0 + c \operatorname{cotg} 90^0$?

40. $a^2 \sin 90^0 + 2\,a\,b \cos 180^0 + b^2 \sec 0^0$ prie $a = 3$, $b = 2$?

41. $p \sin 90^0 - q \cos 360^0 + (p - q) \cos 180^0$?

42. $(a^2 - b^2) \cos 360^0 - 4\,ab \sin 270^0$?

43. $7 \sin 360^0 + 11 \cos 270^0 + 21 \operatorname{tang} 0^0$?

44. $\frac{a \cos 0^0 - b \sec 180^0}{a \operatorname{cosec} 90^0 + b \operatorname{cosec} 170^0} + \frac{a \sec 360^0 - b \cos 360^0}{(a+b) \cos 0^0 - 2\,a \sin 180^0}$?

45. $x^2 \sin (a - b) - xy \cos (a - b) + y^2 \operatorname{tang} (a - b)$ prie $a = b$?

46. $a^2 (a + 3b) \cos (x - z) + 3\,ab\,(a + b) \sin (x - z) + b^2 (b + 3\,a) \sec (x - z)$ prie $x = z$?

47. $\frac{a^3 + b^3}{a + b} \sin x - (a - b)^2 \cos (90 - x)$ prie $x = \frac{\pi}{2}$?

48 $\frac{a \sin x}{\cos z} - b \cos x - (a - b) \frac{\operatorname{tang} z}{\cos x}$ prie $x = 180^0$, $z = 3\,\pi$?

Žemiau dedamieji reiškiniai pakeisti tokiais, kuriuosna teįeitu vien kampai mažesni neg 45^0:

49. $\frac{\operatorname{cotg} 57^0 . \operatorname{cotg} 25^0}{\operatorname{tang} 49^0 \sin 108}$? $\frac{\sin 12^0 . \operatorname{cosec} 136^0}{\operatorname{cotg} 84^0 . \sec 290^0}$? $\frac{\cos 117^0 \operatorname{tang} 283^0}{\sec 318^0 . \sin 340^0}$?

Padaryti prastesniais reiškiniai:

50. $a \cos (90^0 - m) + b \cos (90^0 + m)$?

51. $a^2 + b^2 - 2\,ab \cos (180^0 - x)$?

52. $\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} (-b) - \operatorname{tang} (180^0 + b)$?

53. $\frac{\sin (270^0 - a) \operatorname{tang} (180^0 - b)}{\operatorname{tang} (180^0 + b) (\cos 180^0 - a)} + \frac{\operatorname{cotg} (90^0 - a) \sin (b - 90^0)}{\cos (180^0 - b) \operatorname{tang} (-a)}$?

54. $\frac{\text{tang}(270^0 - a)\,\text{cotg}(90^0 + a)}{\sin(a + 270^0)\,\text{cotg}(- a)} + \frac{\sin(270^0 + a)\,\text{tang}(270^0 - a)}{\text{cotg}(270^0 + a)}$?

Patikrinti formulos:

55. $\frac{\text{tang}(180^0 - a)}{\text{tang}(270^0 - a)} = \frac{\text{cotg}(90^0 + a)}{\text{cotg}(180^0 + a)}$?

56. $\frac{\sin(-a) + \cos(-a)}{\text{tang}(-a) - \text{cotg}(-a)} = \frac{\sin(90^0 + a) + \cos(270^0 - a)}{\text{cotg}(180^0 + a) + \text{tang}(360^0 - a)}$?

57. $\frac{a^2\text{cotg}(180^0 + x) + b^2\,\text{tang}(90^0 + x)}{(a - b)\,\text{cotg}(180^0 - x)} = \frac{(a + b)\,\text{tang}(270^0 - x)}{\text{tang}(270^0 + x)}$?

58. $\frac{\text{tang}(\pi + \alpha)}{\sin(\pi - a)}\,\text{cosec}\,({}^3/_2\,\pi - a) = 0.$

59. $\sin^2(\pi - a) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \sec^2(2\pi - a) -$ $\text{cotg}^2({}^3/_2\,\pi - a)$?

60. Žinant, jog $\cos(b + c) = p$. ir $a + b + c = 180^0$, surasti $\sin a$?



III Skirsnys.

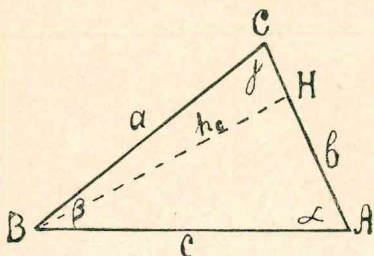
Kampų dėstymo, imstymo, dauginimo ir dalymo formulos.

25. **Dėstymo teorema** vadinas formulos, kuriomis dviejų kampų α ir β sumòs bei liekanos trigonometriškos funkcijos, pav. sin $(\alpha + \beta)$, cos $(\alpha - \beta)$ išreiškiama tų dviejų kampų α ir β funkcijomis. Tos formulos gali buti labai naudingos apskaitant trigonometriškųjų funkcijų dydžius. Pav. jei žinomas sin 1^0 dydis, (kurį turint lengva surasti ir cos 1^0, tang 1^0, cotg 1^0 dydžiai), tai pasigaunant dėstymo teoremos lengva apskaityti ir sin 2^0 = sin $(1^0 + 1^0)$, sin 3^0 = sin $(2^0 + 1^0)$ ir tt. dydžiai. Dėstymo teorema galima išvesti įvairiausiais budais. Mes paduosime patį prasčiausį, paremtą trikampio ploto teorema.

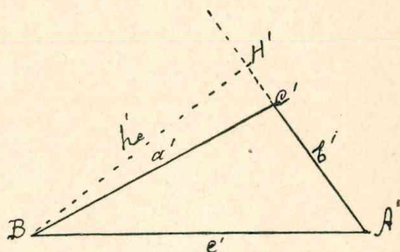
26. **Trikampio ploto teorema**. Teesie trikampis šonais a, b, c, kampais α, β, γ, kaip parodyta 15 brėžinyje. Teesie kampas $\gamma < 90^0$.

Nuleiskim iš viršunės B perpendikulerą BH = h_c į AC = b. Tuomet, kaip žinom iš geometrijos trikampio ABC plotas P bus $= \frac{b.\ h_c}{2.}$. Bet iš augščiau paduotų (16) formulų, turime, jog $h_c = a \sin\gamma$. Todel įstatydami šį reiškinį vietoj h_c trikampio ploto formulon, gausime:

$$P = \frac{ab \sin\gamma}{2} \quad . \; . \; . \quad (49)$$



15. brėž.



16. brėž.

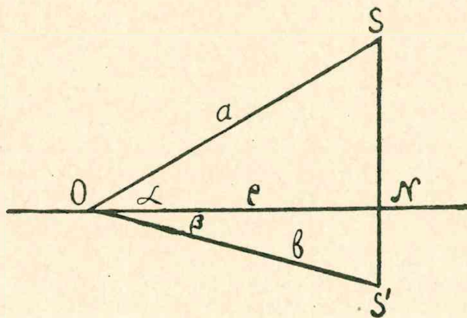
Ši formula nesimaino, net ir kampui tarp šonų *a* ir *b* kėstam tapus, nes kaip matyt iš 16 brėž. kame trikampyje A'B'C' kampas γ' kad ir yra didesnis neg 90^0, tečiau perpendikoleras $h_c' = a' \sin(180^0 - \gamma') = a' \sin\gamma'$, todel įstatę jį trikampio A'B'C' ploto formulon $\frac{a' h_c'}{2}$, gautumėm tą patį rezultatą $P' = \frac{a'b' \sin\gamma'}{2}$. Panašiu budu tam pačiam trikampio ABC plotui P išreikšti galėtumėm gauti dar du reiškiniu, butent:

$$P = \frac{bc \sin\alpha}{2} = \frac{ac \sin\beta}{2} \quad . \ . \ . \quad (50)$$

27. **Dėstymo teorema sinams.** Remiantis trikampio ploto teorema lengva gauti dėstymo teorema sinams. Tam tikslui vedam by kokią tiesiąją ON. Punkte O iš vienos šalies tiesiosios ON sudarom kampą α, iš antros kampą β (žiur. 17 brėž.). Iš by kokio tiesios ON punkto, pav. iš N vedam perpendikulerą, perkertantį nubrėžtų kampų šonus punktuose S ir S'. Teesie trikampio S'OS šonai OS = a, OS' = b, o ON = c. Tuomet iš brėžinio matom, jog

$$\triangle \ SOS' = \triangle \ SON + \triangle \ NOS'.$$

Išreiškę tų trijų trikampių plotus trikampio ploto teoremoj



17. brėž.

nurodytu budu, gausime lygybę:

$$\frac{a\,b \sin(\alpha+\beta)}{2} = \frac{a\,c \sin\alpha}{2} + \frac{b\,c \sin\beta}{2},$$

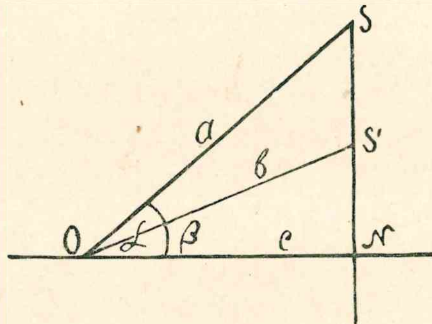
kurį padalinę padaugu $\frac{a\,b}{2}$, rasime:

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{c}{b} \sin\alpha + \frac{c}{a} \sin\beta$$

Bet iš (15) ir (16) formulų ir iš to pat 17 brėž. matom, jog $\frac{c}{b} = \cos\beta$, $\frac{c}{a} = \cos\alpha$, todel galutinai gauname lygybę:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \quad . \; . \; . \quad (51)$$

Sudarę kampus α ir β ($\alpha > \beta$) iš vienos tiesiosios ON šalies (žiur. 18 brėž.), turėsim:



18. brėž.

$$\Delta\ SOS' = \Delta\ SON - S'ON$$

arba $$\frac{ab \sin(\alpha-\beta)}{2} = \frac{ac \sin\alpha}{2} - \frac{bc \sin\beta}{2}$$

iškur padalinę padaugu $\frac{a\,b}{2}$, kaip augščiau gausime:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta \quad . \; . \; . \quad (52)$$

28. Dėstymo teorema kosinams. Formuloj (52) visi kampai α, β ir ($\alpha-\beta$) smaili. Taigi ji pildysis ir dviejų smailiųjų kampų $90^0-\alpha$ ir β žygyje. Vadinas, turėsime lygybę.

$$\sin(90^0-\alpha-\beta) = \sin(90^0-\alpha) \cos\beta - \cos(90^0-\alpha) \sin\beta \quad . \quad (52')$$

Bet $\sin(90^0-\alpha-\beta) = \sin[90^0-(\alpha+\beta)] = \cos(\alpha+\beta)$, $\sin(90^0-\alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90^0-\alpha) = \sin\alpha$ todel (52′) formula galutinai įgauna išvaizdą:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \quad . \; . \; . \quad (53)$$

Panašiu budu augščiau rastoj formuloj (51) sinų sumai $\sin(\alpha+\beta)$ pakeičiant smailakampį α smailakampiu $90^0-\alpha$, rasime:

$$\sin(90^0-\alpha+\beta)=\sin(90^0-\alpha)\cos\beta+\cos(90^0-\alpha)\sin\beta \quad (51')$$

bet $\sin(90^0-\alpha+\beta)=\sin[90^0-(\alpha-\beta)]=\cos(\alpha-\beta)$, taigi galutinai prieisime formulą:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\ldots \quad (54)$$

29. Dėstymo teoremų apibendrinimas. Augščiau išvestosios teoremos, žiurint jų išvedimo, tetinka vien smailiems kampams. Bet lengvai galima išrodyt, kad jos aplamai tinka by kokiems kampams. Teesie pav. kampas α gulįs trečioj ratilo ketvirtyj ir β kėstakampis. Tuomet $\alpha-180$ ir $180-\beta$ bus smailakampiai. Taigi jiems augščiau išvestos formulos bus tinkomos; vadinas, turėsime lygybę:

$$\sin(\alpha-180^0+180^0-\beta)=\sin(\alpha-180^0)\cos(180^0-\alpha)+\cos(\alpha-180^0)\sin(180-\beta)\ldots\ldots\ldots \quad (51'')$$

Bet kairioji tos lygybės pusė yra lygi $\sin(\alpha-\beta)$; dešiniojoj gi pusėj bus:

$$\sin(\alpha-180^0)=\sin[-(180^0-\alpha)]=-\sin(180^0-\alpha)=-\sin\alpha.$$
$$\cos(\alpha-180^0)=\cos[-(180^0-\alpha)]=+\cos(180^0-\alpha)=-\cos\alpha.$$
$$\sin(180^0-\beta)=\sin\beta,\ \cos(180^0-\beta)=\cos\beta,$$

todel galutinai iš (51″) lygybės gausime jau mums žinomąją (52) lygybę

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Vadinas, radom kampams α ir β, iš kurių nei vienas nėra smailakampis tą pačią, formulą, kurią buvom gavę smailiems kampams. Panašiu budu patikrinanama ir kitos dėstymo formulos.

30. Dėstymo teorema tangensams. Remdamies pamatiniais trigonometriškųjų funkcijų santikiais, turime lygybę:

$$\text{tang}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

Padalę padaugu $\cos\alpha\cos\beta$ dešinės to lyginio dalies skaitiklį ir vardiklį, gausime:

$$\text{tang}(\alpha+\beta)=\frac{\text{tang}\alpha+\text{tang}\beta}{1-\text{tang}\alpha\,\text{tang}\beta}\ldots\ldots \quad (55)$$

Panašiu budu rasime taipgi, jog

$$\text{tang}\,(\alpha-\beta)=\frac{\text{tang}\,\alpha-\text{tang}\,\beta}{1+\text{tang}\,\alpha\ \text{tang}\,\beta}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (56)$$

31. **Dėstymo teorema kampams, kai jų yra daugiau neg du.** Nesunka išvesti formulos trijų, keturių ir daugiau kampų sumos funkcijoms sin, cos, tang. Taip pav.

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin[(\alpha+\beta)+\gamma]=\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma$$

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos[(\alpha+\beta)+\gamma]=\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin a$$

$$\text{tang}\,(\alpha+\beta+\gamma)=\text{tang}\,[(\alpha+\beta)+\gamma]=\frac{\text{tang}\,(\alpha+\beta)+\text{tang}\,\gamma}{1-\text{tang}\,(\alpha+\beta)\,\text{tang}\,\gamma}$$

Įstatę dešnėn tų reiškinių pusėn vietoj sin $(\alpha+\beta)$, cos $(\alpha+\beta)$, tang $(\alpha+\beta$ jiems atitinkančius reiškinius iš (51), (53) ir (55), rasime:

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\cos\alpha\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta$$
$$-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (57)$$

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma-\cos\beta\sin\alpha\sin\gamma$$
$$-\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (58)$$

$$\text{tang}\,(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\text{tang}\,\alpha+\text{tang}\,\beta+\text{tang}\,\gamma-\text{tang}\,\alpha\ \text{tang}\,\beta\ \text{tang}\,\gamma}{1-\text{tang}\,\alpha\ \text{tang}\,\beta-\text{tang}\,\alpha\ \text{tang}\,\gamma-\text{tang}\,\beta\,\text{tang}\,\gamma}\ (59)$$

Panašiu budu galima gauti taipgi formulos sin, cos, tang sumoms:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta,\ \alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon\ \text{ir tt.}$$

32. **Dauginimo teorema**. Iš formulų sin, cos, tang dviejų kampų sumos, lengva gauti sin, cos, tang dvigubo, trigubo ir aplamai tam tikru skaičium padauginto kampo. Tam tikslui užtenka formulose (51), (53), (55) prileisti $\beta=\alpha$; tuomet gausime šiuos reiškinius:

$$\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.\ (60)$$

$$\cos 2\alpha=\cos\alpha\,.\,\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\ (61)$$

$$\text{tang}\,2\,\alpha=\frac{\text{tang}\,\alpha+\text{tang}\,\alpha}{1-\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\alpha}=\frac{2\ \text{tang}\,\alpha}{1-\text{tang}^2\alpha}\ .\ (62)$$

Prileidę formulose (51) ir (53) $\beta=2\alpha$, gausime:

$$\sin 3\alpha=\sin\alpha\ \cos 2\alpha+\cos\alpha\ \sin 2\alpha=\sin\alpha\ (\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+$$
$$2\sin\alpha\ \cos^2\alpha=3\sin\alpha\ \cos^2\alpha-\sin^3=3\sin\alpha\ (1-\sin^2\alpha)-\sin^3\alpha$$
$$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

$\cos 3\alpha = \cos\alpha \cos 2\alpha - \sin\alpha \sin 2\alpha = \cos\alpha (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2\sin^2\alpha \cos\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha \sin^2\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha (1 - \cos^2\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$

Panašiu budu galima rasti reiškiniai funkcijoms $\sin 4\alpha$, $\cos 4\alpha$, $\sin 5\alpha$, $\cos 5\alpha$, ... $\sin m\alpha$, $\cos m\alpha$. Pastarųjų funkcijų reiškiniai turės šią išvaizdą:

$$\sin m\alpha = \frac{m}{1}\sin\alpha + \frac{m(1^2-m^2)}{1.\ 2.\ 3.}\sin^3\alpha + \frac{m(1^2-m^2)(3^2-m^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}\sin^5\alpha + \frac{m(1^2-m^2)(3^2-m^2)(5^2-m^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.}\sin^7\alpha + \ldots \quad (63)$$

$$\cos m\alpha = 1 - \frac{m^2}{1.2.}\sin^2 - \frac{m^2(2^2-m^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}\sin^4\alpha - \frac{m^2(2^2-m^2)(4^2-m^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.}\sin^6\alpha - \frac{m^2(2^2-m^3)(4^2-m^2)(6^2-m^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.}\sin^8\alpha - \ldots \quad (64)$$

kame m reiškia by kokį neskaidytą skaičių.

Formulos (63) ir (64) yra visada tikros, bet (63) užbaigtą formą įgauna tik, jei m yra likos skaičius, o (64) virsta užbaigta tik prie m sietos skaičiaus.

33. **Dalymo teorema.** Imkime lyginiu (19) ir (61): $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. Dėstydami ir imstydami juodu, rasime:

$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha;\ 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$$

iš kur randame:

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}};\ \sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} \quad \ldots\ldots (65)$$

Įstatę pastaruosna reiškiniuosna α vietoj 2α ir todel $\frac{\alpha}{2}$ vietoj α, gausime:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (65)$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (66)$$

Padalę reiškinį (66) reiškiniu (65) rasime

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (67)$$

Padauginę to pošakninio dydžio skaitiklį ir vardiklį reiškiniu 1 — cos α, rasime:

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(68)$$

Formulos (65), (66), (67), (68) nustato pusiau padalinto kampo α funkcijas. Jei augščiau gautame reiškiny

$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ pašakninio dydžio skaitiklį ir vardiklį padaugintumėm reiškiniu 1 + cos α, tai gautumėm:

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.\quad\ldots\ldots\quad(69)$$

Lengva išrodyti, jog pastarasis reiškinys yra identiškas reiškiniui (68) ir todel funkcijai $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$ išreikšti galima naudoties ir vienu ir antru, kur katras labiau tinka.

34. **Kampo trisekcija.** Norint surasti kampo trečdalio funkcijas pav. $\sin\frac{\alpha}{3}$, reikia augščiau išveston formulon:

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ vieton 3α padėt α ir vieton α įstatyt $\frac{\alpha}{3}$; tuomet gausime lygybę:

$$\sin\alpha = 3\sin\frac{\alpha}{3} - 4\sin^3\frac{\alpha}{3}$$

Pažymėję sin α raide *m*, o $\sin\frac{\alpha}{3}$ raide x, prieisime galop kubiškąjį lyginį: $m = 3x - 4x^3$, arba

$$x^3 - {}^3/_4\, x + \frac{m}{4} = 0$$

Jei mes galėtumėm skriestuvu ir linijuoklu tą lyginį nubrėžti, tai mes grafiškai rastumėm $\sin\frac{\alpha}{3}$, ir todel padalintumėm kampą trimis lygiomis dalimis. Bet, kaip žinome, elementarės geometrijos priemonėmis nubrežti 3-jo laipsnio lyginys nėra galima, taigi ir pragarsėjęs senovėj kampo trisekcijos klausimas, atskyrus kai-

kuriuos dalinius žygius, pasigaunant vien skriestuvo ir linijuoklo nėra galimas.

Suradimas trigonometriškųjų funkcijų $\frac{\alpha}{4}, \frac{\alpha}{5} \ldots$ turint trigonometriškas funkcijas neskaidyto kampo α veda į 4-jo, 5-jo.... laipsnio lyginių gvaldymą.

Bendros $\sin\frac{\alpha}{m}$, $\cos\frac{\alpha}{m}$ reiškinių formulos galima gauti iš bendrų formulų (63) ir (64), įstatant josna vietoj $m\alpha$ dydį α ir vietoj α dydį $\frac{\alpha}{m}$.

Atvirsčiųjų trigonometriškųjų funkcijų savitarpio santikiai. Augščiau (24 §) mes esam parodę, jog atvirsčių trigonometriškų funkcijų arc sin, arc tang, nenustatomybei išvengti, imama jos paprastai ribose tarp $\frac{\pi}{2}$ ir $-\frac{\pi}{2}$. Tuo budu arcsin y, arctang y reiškia mažiausį teigiamąjį bei neigiamąjį lanką, kurio sinas bei tangensas yra y. Iš čia aišku, jog kokį ženklą, turės y, tokį turės ir funkcijos arcsin y, arc tang y, t. y. arc sin (—y) bus $= -\arcsin y$, $\operatorname{arctang}(-y) = -\operatorname{arctang} y$.

Tas pat reikia pasakyti ir apie dvi kitas funkcijas arc cotg ir arc cosec.

Panašiu budu nenustatomybei išvengti funkcija arccos imama ribose tarp o ir π. Vadinas arc cos y reiškia mažiausį teigiamąjį bei neigiamąjį lanką, kurio cos yra y. Iš čia aišku, jog arccos y bus mažesnis neg $\frac{\pi}{2}$ prie y teigiamojo ir didesnis neg $\frac{\pi}{2}$ prie y neigiamojo.

Nesunku ir atvirsčiųjų trigonometriškųjų funkcijų savitarpiai santikiai formulomis išreikšti. Tam tikslui teesie lyginys $y = \sin x$; iš čia gaunam $x = \arcsin y$. Iš brėžinio su pravestomis trigonometriškomis linijomis (7) savaime aišku, jog

$$\arcsin y + \arccos y = \frac{\pi}{2}$$

Toliau iš lygybės $\cos^2 = 1 - \sin^2$ randame, jog

$$\cos x = \sqrt{1 - y^2},\ \operatorname{tang} x = \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}$$

o iš čia gauname:

$$\arcsin y = \arccos \sqrt{1 - y^2};\ \arcsin y = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

Taip pat iš lyginio $y = \operatorname{tang} x$, gaunam $x = \operatorname{arc\,tang} y$ o kadangi $\sin x = \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}}$; $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$, todel bus:

$$\operatorname{arc\,tang} y = \arcsin \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$$

Atvirsčiųjų trigonometriškų funkcijų dėstymo teorema. Teesie du lanku u ir υ, mažesniu neg $\frac{\pi}{2}$; prileiskim, kad $x = \sin u$, $y = \sin \upsilon$.

Turėdami omenėje, jog

$$\sin(u + \upsilon) = \sin u \cos \upsilon + \cos u \sin \alpha = x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}$$

randame prie $u + \upsilon \leqq \frac{\pi}{2}$:

$$u + \upsilon = \arcsin (x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

o jei $u + \upsilon > \frac{\pi}{2}$, tai bus:

$$u + \upsilon = \pi - \arcsin (x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2})$$

Bet sąlyga $u + \upsilon \leqq \frac{\pi}{2}$ arba $u \leqq \frac{\pi}{2} - \upsilon$ reiškia, jog $\sin u \leqq \cos \upsilon$ arba $\sin^2 \upsilon \leqq 1 - \sin^2 \upsilon$ arba galop $x^2 + y^2 \leqq 1$; sąlyga gi $u + \upsilon > \frac{\pi}{2}$ reiškia jog $x^2 + y^2 > 1$. Todelei pakeitę u ir υ simboliais $\arcsin x$ ir $\arcsin y$ randame:

$$\arcsin x + \arcsin y = \operatorname{arc} (x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}) \quad (51')$$

prie $x^2 + y^2 \leqq 1$ ir

$$\arcsin x + \arcsin y = \pi - \operatorname{arc} (x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}) \quad (51'')$$

prie $x^2 + y^2 > 1$.

Panašiu budu rasime, jog visada be jokių sąlygų bus:

$$\arcsin x - \arcsin y = \arcsin (x\sqrt{1 - y^2} - y\sqrt{1 - x^2})$$

nes liekana $\arcsin x - \arcsin y$ bus visada mažesnė neg $= \frac{\pi}{2}$.

Teesie toliau u ir υ du lanku, kuriuodu yra mažesniu neg $\frac{\pi}{2}$ ir prileiskim, kad $x = \cos u$, $y = \cos \upsilon$; $u = \arccos x$, $\upsilon = \arccos y$.

Kadangi

$$\cos(u + \upsilon) = \cos u \cos \upsilon - \sin u \sin \upsilon = xy - \sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{1 - y^2}$$

ir $u + \upsilon < \frac{\pi}{2}$, tatai turėsime:

$$u + \upsilon = \arccos(xy - \sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{1 - y^2})$$

arba

$$\arccos x + \arccos y = \arccos(xy - \sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{1 - y^2})$$

Galop prileidę, jog $x = \operatorname{tang} u$, $y = \operatorname{tang} \upsilon$; $u = \operatorname{arctang} x$, $\upsilon = \operatorname{arctang} y$ ir turėdami omenėje, jog

$$\operatorname{tang}(u + \upsilon) = \frac{\operatorname{tang} u + \operatorname{tang} \upsilon}{1 - \operatorname{tang} u \cdot \operatorname{tang} \upsilon} = \frac{x + y}{1 - xy}$$

randame:

$$u + \upsilon = \operatorname{arctang}\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right)$$

prie $u + \upsilon \leqq \frac{\pi}{2}$ ir

$$u + \upsilon = \pi - \operatorname{arctang}\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right)$$

prie $u + \upsilon > \frac{\pi}{2}$. Bet sąlyga $u + \upsilon \leqq \frac{\pi}{2}$ reiškia, jog $\operatorname{tang} u \leqq \operatorname{cotg} \upsilon$ arba $x \leqq \frac{1}{y}$ arba galop $xy \leqq 1$, o sąlyga $u + \upsilon > \frac{\pi}{2}$ reiškia, jog $xy > 1$.

Delei to visa, pakeitę u ir υ simboliais arctang x ir arctang y, gausime:

$$\operatorname{arctang} x + \operatorname{arc\,tang} y = \operatorname{arctang} \frac{x + y}{1 - xy}$$

kuomet $xy \leqq 1$ ir

$$\operatorname{arctang} x + \operatorname{arctang} y = \pi - \operatorname{arctang} \frac{x + y}{1 - xy}$$

prie $xy > 1$.

Pav. teesie $\tan x = {}^1/_2$, $\tan y = {}^1/_3$, tuomet $x = \operatorname{arctang} {}^1/_2$, $y = \operatorname{arctang} {}^1/_3$. O kadangi $\tan (x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan x}$

$$= \frac{{}^1/_2 + {}^1/_3}{1 - {}^1/_2 \cdot {}^1/_3} = 1,$$

tai $x + y = \frac{\pi}{4}$, arba $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctang} {}^1/_2 + \operatorname{arctang} {}^1/_3$.

Tokiu pat budu be jokių sąlygų gausime:

$$\operatorname{arctang} x - \operatorname{arctang} y = \operatorname{arctang} \frac{x - y}{1 + xy},$$

nes liekana $\operatorname{arctang} x - \operatorname{arctang} y$ visada mažesnė neg $\frac{\pi}{2}$.

Elgiantis panašiai, lengva gauti ir likusioms atvirsčioms trigonometriškoms funkcijoms arcsec, arccotg, arccosec ir jų sumoms bei liekanoms tam tikros formulos, kurių išvedimą paliekame patiems skaitytojams.

Uždaviniai:

61. Išvesti formulos $\operatorname{cotg}(\alpha + \beta)$, $\sec(\alpha + \beta)$, $\operatorname{cosec}(\alpha + \beta)$?
62. Išvesti formulos $\operatorname{cotg} 2\alpha$, $\sec 2\alpha$, $\operatorname{cosec} 2\alpha$?
63. Išreikšti $\operatorname{tang} 3\alpha$, $\operatorname{tang} 4\alpha$ pasigaunant $\operatorname{tang}\alpha$?
64. Išreikšti $\operatorname{cotg} 3\alpha$, $\operatorname{cotg} 4\alpha$ pasigaunant $\operatorname{cotg}\alpha$?
65. Išreikšti a) $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}$ ir $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$ pasigaunant $\operatorname{tang}\alpha$ ir $\operatorname{tang}\beta$?

    b) $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$ ir $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$ pasigaunant $\operatorname{cotg}\alpha$ ir $\operatorname{cotg}\beta$?
66. Išvesti formulos $\cos(a + b - c - d)$, $\operatorname{cotg}(a + b - c + d)$?
67. Parodyt, jog prie $a + b + c = 180^0$ turi vietos šios lygybės: $\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b + \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cdot \operatorname{tang} b \cdot \operatorname{tang} c$

$$\cot g\frac{a}{2} + \cot g\frac{b}{2} + \cot g\frac{c}{2} = \cot g\frac{a}{2} \cdot \cot g\frac{b}{2} \cdot \cot g\frac{c}{2}$$

$$\sin a + \sin b \mp \sin c = 4\cos\frac{a}{2} \cdot \cos\frac{b}{2} \cdot \cos\frac{c}{2}.$$

$$\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c - 2\cos \alpha \,.\, \cos b \,.\, \cos c = 2?$$

68. Apskaityti tang (a + b) prie tanga = 2, tangb = 3?

69. Patikrinti lygybės: cosec2a + cotg2a = cotga?
cotga + tanga = 2cosec2a?

70. Apskaityti cos2x, prie sinx = 0,6?

71. Apskaityti sin3a ir cos3a prie cosa = $^1/_3$?

72. Parodyt, jog $\frac{\sin a + \sin 3a + \sin 5a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a} = \text{tang}\,3a$?

73. Parodyti, jog $\frac{\sin a + 2\sin 3a + \sin 5a}{\sin 3a + 2\sin 5a + \sin 7a} = \frac{\sin 3a}{\sin 5a}$?

74. Parodyti, jog $\text{tang}\,\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{2\sin a - \sin 2a}{2\sin a + \sin 2a}}$?

Patikrinti teisingumą formulų:

75. $\sin(a \mp b)\cos(a - b) + \cos(a + b)\sin(a - b) = 2\sin a \cos a$?

76. $\text{tang}(a + b) + \text{tang}(a - b) = \frac{2\,\text{tang}\,a \sec^2 b}{1 - \text{tang}^2 a\, \text{tang}^2 b}$?

77. $\text{tang}(a \pm b) = \frac{\cot g\, a \pm \cot g\, b}{1 \mp \cot g\, a \cot g\, b}$?

78. $\sec(a \pm b) = \frac{\sec a \sec b}{1 \mp \text{tang}\, a\, \text{tang}\, b}$?

79. $\text{cosec}\, 2a = \frac{\sec a \sec b}{2}$?

80. $\sec 2a = \frac{\cos a \cos b}{\cot g\, a - \text{tang}\, a}$?

81. $\text{tang}\, 2a = \frac{1}{1 - \text{tang}\, a} - \frac{1}{1 + \text{tang}\, a}$?

82. $\text{tang}\, a = \sqrt{\frac{\sec 2a - 1}{\sec 2a + 1}}$?

83. $\sqrt{\frac{1 + \sin 2a}{1 - \sin 2a}} = \text{tang}(45^0 + a)$?

84. Prie kokios sąlygos $\sin \alpha + \sin \beta = \sin(a + b)$?

85. Apskaityti cotg 2 a, jei sin a = $^3/_5$?

86. $\cot g\, a = \frac{n}{m}$, apskaityti sin 2 a?

87. $\sin x = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$, apskaityti tang $\frac{x}{2}$?

88. Apskaityti cos (x + z) + cos (x — z), jei sec x = m, o cosec z = n?

Žinant, jog tang 45⁰ = 1, parodyti, jog —

89. $\text{arc tang}\ ^1/_7 + \text{arc tang}\ ^3/_4 = \frac{\pi}{4}$?

90. $\text{arctang}\ ^1/_7 + 2\ \text{arc tang}\ ^1/_3 = \frac{\pi}{4}$?

$4\ \text{arc tang}\ ^1/_5 - \text{arc tang}\ ^1/_{239} = \frac{\pi}{4}$?



IV Skirsnys.

Pridavimas formuloms išvaizdos tinkamos logaritmiškiems apskaitymams.

35. Pakeitimas sumų bei liekanų padaugais bei daliniais. Kaip žinoma, visi painųs apskaitymai, žymiai palengvėja, vartojant logaritmus. Bet kadangi logaritmai nuo sumos bei liekanos tiesiog imti nėra galima, todel reikia mokėti trigonometriškųjų dydžių suma bei liekana pakeisti padaugu bei daliniu. Dažniausiai šiam tikslui vartojamosios perkeitimo formulos gaunama šiuo keliu. Imam žinomas jau mums iš 27—28 §§ dėstymo teoremos formulas:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Dėstydami ir imstydami jas gausime:

$$\left.\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) &= 2\sin\alpha\cos\beta\\ \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) &= 2\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) &= 2\cos\alpha\cos\beta\\ \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) &= 2\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (70)$$

Prileiskim nun, jog $\alpha+\beta = m$, $\alpha-\beta = n$; dėstydami ir imstydami tuodu lyginiu, rasime: $\alpha = \frac{m+n}{2}$; $\beta = \frac{m-n}{2}$. Įstatydami formulosna vietoj $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, α, β jiems atitinkančius reiškinius m, n, $\frac{m+n}{2}$, $\frac{m-n}{2}$ gausime:

$$\sin m + \sin n = 2\sin\left(\frac{m+n}{2}\right)\cos\left(\frac{m-n}{2}\right) \quad . \; . \; . \; . \quad (71)$$

$$\sin m - \sin n = 2\cos\left(\frac{m+n}{2}\right)\sin\left(\frac{m-n}{2}\right) \quad \ldots \quad (72)$$

$$\cos m + \cos n = 2\cos\left(\frac{m+n}{2}\right)\cos\left(\frac{m-n}{2}\right) \quad \ldots \quad (73)$$

$$\cos m - \cos n = -2\sin\left(\frac{m+n}{2}\right)\sin\left(\frac{m-n}{2}\right) \quad \ldots \quad (74)$$

Dalydami (71) lyginį (72)-ju gausime:

$$\frac{\sin m + \sin n}{\sin m - \sin n} = \frac{2\sin\left(\frac{m+n}{2}\right)\cos\left(\frac{m-n}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{m+n}{2}\right)\sin\left(\frac{m-n}{2}\right)} = \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{m-n}{2}\right)} \quad \ldots \ldots \quad (75)$$

36. **Padedamojo kampo įvedimas.** Kad parodžius bendrą budą dviejų tiekybių sumai bei liekanai pakeisti padaugu bei daliniu, imkim reiškinį $x = A + B$, kame A ir B reiškia by kokius dydžius. Padauginę ir padalę antrą to reiškinio dalį dydžiu A, gausime lyginį $x = A\left(1 + \frac{B}{A}\right)$. Prileiskim $\frac{B}{A} = \operatorname{tang}^2\varphi$. Tai visada galima padaryti, nes tangensas gali turėti visus galimus dydžius nuo 0 lig $\pm\infty$; vadinas, visada galima rasti kampas, kurio tangensas bus lygus $= \sqrt{\frac{B}{A}}$. Tuo budu augščiau imtasis reiškinys įgaus išvaizdą: $x = A\,(1 + \operatorname{tang}^2\varphi) = A\sec^2\varphi = \frac{A}{\cos^2\varphi}$, tinkamą apskaitymui logaritmais.

Jei butu $x = A - B$, kame $B < A$, tai pridavę liekanai $A - B$ išvaizdą $A\left(1 - \frac{B}{A}\right)$, galime prileisti $\frac{B}{A} = \sin^2\varphi$, nes $\frac{B}{A} < 1$, o sinas gali turėti visus dydžius nuo 0 lig ± 1; tuomet $x = A\,(1 - \sin^2\varphi) = A\cos^2\varphi$.

Jei pagalios $B > A$, tai $x = A - B$ galima išreikšti formoje $x = -(B - A) = -B\left(1 - \frac{A}{B}\right)$; prileidžiant čia $\frac{A}{B} = \sin^2\varphi$ gautumėm rezultatą panašų į gautąjį antrame žygyje.

Šis sumos bei liekanos pakeitimo budas padaugu bei daliniu vadinas padedamojo kampo įvedimu.

Kaip šis budas yra vartojamas praktikoje, paaiškins mums tai keletas pavyzdžių.

1) Reikia, sakysime, padaryti logaritmiškaja ši formula: $x = \sqrt{m^2 + n^2}$; pridavę jai išvaizdą $x = m\sqrt{1 + \frac{n^2}{m^2}}$ ir prileidę, kad $\frac{n}{m} = \text{tang}\,\varphi$, gausime $x = m\sqrt{1 + \text{tang}^2\varphi} = m \sec\varphi$.

2) Jei butu duota $x^2 = m^2\sin^2\alpha + n^2\cos^2\alpha$, tai šiam reiškiniui galima priduoti išvaizdą: $x^2 = m^2\sin^2\alpha\left(1 + \frac{n^2\cos^2\alpha}{m^2\sin^2\alpha}\right) = m^2\sin^2\alpha\,(1 + \frac{n^2}{m^2}\,\text{cotg}^2\alpha)$; prileidę čia $\frac{n^2}{m^2}\,\text{cotg}^2\alpha = \text{tang}^2\varphi$, gausime: $x^2 = m^2\sin^2\alpha\,(1 + \text{tang}^2\varphi) = m^2\sin^2\alpha\,\sec^2\varphi$; iškur $x = m\sin\alpha\sec\varphi = \frac{m\sin\alpha}{\cos\varphi}$.

3) Teesie $x = \frac{m - n}{m + n}$. Priduokim šiam reiškiniui išvaizdą: $x = m\left(1 - \frac{n}{m}\right) : m\left(1 + \frac{n}{m}\right) = \left(1 - \frac{n}{m}\right) : \left(1 + \frac{n}{m}\right)$ ir prileiskim $\frac{n}{m} = \text{tang}\,\varphi$; tuomet turėsime: $x = (1 - \text{tang}\,\varphi) : (1 + \tan\varphi)$ $= \left(1 - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) : \left(1 + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) = \frac{\cos\varphi - \sin\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi} = \frac{\sin(90^0 - \varphi) - \sin\varphi}{\sin(90^0 - \varphi) + \sin\varphi} = \frac{2\cos 45^0 \sin(45^0 - \varphi)}{2\sin 45^0 \cos(45^0 - \varphi)}$. Bet $\cos 45^0 = \sin 45^0$, todel $x = \frac{\sin(45^0 - \varphi)}{\cos(45^0 - \varphi)} = \text{tang}\,(45^0 - \varphi)$.

Kampas $45^0 - \varphi$ bus žinomas, nes φ gaunama iš sąlygos $\tan\varphi = \frac{n}{m}$.

37. Trigonometriškas kvadratinio lyginio gvaldymas. Iš algebros žinom, jog bendra kvadratinio lyginio išvaizda yra: $x^2 + px + q = 0$ ir jog $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. Pasigaunant

padedamojo kampo, galima ši formula padaryti logaritmiškaja ir tuo palengvinti šaknų apskaitymas, ypač tuomet, kuomet koeficientai p ir q yra dideliai skaičiai. Prileiskim q esant teigiamąjį dydį ir kad lyginys turi tikras šaknis, t. y. kad $q < \frac{p^2}{4}$. Reiškiniui x šiame atvejyje galima priduoti ši išvaizda:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4}\left(1 - q : \frac{p^2}{4}\right)} = -\frac{p}{2} \pm \frac{p}{2}\sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}$$

$= -\frac{p}{2}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right)$. Kadangi mes esam prileidę, jog $q < \frac{p^2}{4}$, tai $4q < p^2$ ir $\frac{4q}{p^2} < 1$; todel galime prileisti, jog $\frac{4q}{p^2} = \sin^2\varphi$; tuomet $x = -\frac{p}{2}(1 \mp \sqrt{1 - \sin^2\varphi}) = -\frac{p}{2}(1 \mp \cos\varphi)$; taigi $x_1 = -\frac{p}{2}(1 - \cos\varphi)$; $x_2 = -\frac{p}{2}(1 + \cos\varphi)$.

Bet iš (65) ir (66) formulų: $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$, $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$ gauname: $1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$ ir $1 + \cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}$; iš čia galutinai rasime: $x_1 = -p\sin^2\frac{\varphi}{2}$ ir $x_2 = -p\cos^2\frac{\varphi}{2}$. Kampas $\frac{\varphi}{2}$ bus žinomas, nes φ gaunama apskaitymu iš sąlygos $\sin^2\varphi = \frac{4q}{p^2}$.

Jei q butu neigiamasis dydis $= -q_1$, tai iš lyginio $x^2 + px - q_1 = 0$, kurs prie tos sąlygos turi tikras šaknis prie by kokių p ir q_1 absolučių dydžių, gausime:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q_1} = \frac{p}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4q_1}{p^2}}\right)$$

Prileidę čia $\frac{4q_1}{p^2} = \tan^2\varphi$, rasime:

$$x = \frac{p}{2}(-1 \pm \sec\varphi) = \frac{p}{2}\left(-1 \pm \frac{1}{\cos\varphi}\right) = \frac{p}{2}\left(\frac{-\cos\varphi \pm 1}{\cos\varphi}\right),$$

iškur turėsime: $x_1 = \frac{p}{2}\frac{(1 - \cos\varphi)}{\cos\varphi}$; $x_2 = -\frac{p}{2}\frac{(1 + \cos\varphi)}{\cos\varphi}$.

O kodangi $1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$, $1 + \cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}$,

todel galutinai $x_1 = \frac{p\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$; $x_2 = -\frac{p\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$.

Mes išreiškėme lyginio šaknis padedamuoju kampu φ ir koeficientu p; jos galima išreikšti taipgi ir pasigaunant φ ir q. Ir ištikrųjų q esant teigiamam ir $< \frac{p^2}{4}$, mes tuiėjome:

$x_1 = -p\sin^2\frac{\varphi}{2}$; $x_2 = -p\cos^2\frac{\varphi}{2}$; kadangi čia $\sin^2\varphi = \frac{4q}{p^2}$, tai

$p = \frac{2\sqrt{q}}{\sin\varphi}$; todel $x_1 = -\frac{2\sqrt{q}\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin\varphi}$; $x_2 = -\frac{2\sqrt{q}\cos^2\frac{2\varphi}{2}}{\sin\varphi}$. Bet

$\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos\varphi}{2}$; $\cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1 + \cos\varphi}{2}$, taigi

$x_1 = -\frac{2\sqrt{q}\,(1 - \cos\varphi)}{2\sin\varphi}$, $x_2 = -\frac{2\sqrt{q}\,(1 + \cos\varphi)}{2\sin\varphi}$. O kadangi $\frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi} = \tang\frac{\varphi}{2}$, $\frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\tang\frac{\varphi}{2}} =$

$\cotg\frac{\varphi}{2}$ (ž. 68 ir 69 form.), tai galutinai $x_1 = -\sqrt{q}\tang\frac{\varphi}{2}$

$x_2 = -\sqrt{q}\cotg\frac{\varphi}{2}$.

Jei q butu neigiamasis dydis $= -q_1$ tai, kaip jau augščiau esam matę, $x_1 = \frac{p\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$, $x_2 = -\frac{p\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$. Bet šiame atvejyje $\tang^2\varphi = \frac{4q_1}{p^2}$, taigi $p = \frac{2\sqrt{q_1}}{\tang\varphi}$; todel $x_1 = \frac{2\sqrt{q_1}\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi.\tang\varphi}$

$$= \frac{2\sqrt{q_1}\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin\varphi};\ x_2 = -\frac{2\sqrt{q_1}\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi\ \operatorname{tang}\varphi} = -\frac{2\sqrt{q_1}\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\sin\varphi}.$$

Tiem dviem reiškiniam x_1, x_2 galima, priduoti ši išvaizda: $x_1 = \sqrt{q_1}\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$, $x_2 = -\sqrt{q_1}\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$. Tam tikslui užtenka abieją reiškinią vardikly pakeist $\sin\varphi$, jam lygiu reiškiniu $2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$.

Uždaviniai:

Paversti padaugais šie reiškiniai:

91. a) $\sin 105^0 + \sin 750^0$? b) $\cos a + \sin a$?
c) $\sin a + \cos b$? d) $\sin 4a - \sin 2a$?
e) $\cos 2a - \cos(n - 2a)$?

92. a) $\frac{\sin 50^0 + \sin 10^0}{\sin 74^0 - \sin 34^0}$? b) $\frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a}$?

Padaryti logaritmiškais šie reiškiniai:

93. a) $x = \sqrt{a+b}$? b) $x = \sqrt{a-b}$? c) $x = \frac{a+b}{a-b}$?

94. $\sqrt{4\operatorname{tang} a + \sin a} + \sqrt{4\operatorname{tang} a - \sin a}$?

95 $x^2 = a^2 + b^2 + ab$?

96. $x = \sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}$?

97. $x = \sqrt{(a+b)^2 - 4ab\cos a}$?

98. $x = a\sin\alpha - b\sin\beta$?

99. $x = \frac{a\sin\alpha}{1 + a\cos\alpha}$?

100. $\cos^2(a+b) - \sin^2 a$?

101. $\operatorname{tang} a + \operatorname{cotg} b$?

102. $a\cos^3 x + b\sin x\cos^2 x + b\sin^3 x + a\sin^2 x\cos x$?

103. $1 + \sin a + \cos a$?

Patikrinti šios formulos:

104. a) $\sin a \sin b = \frac{1}{2}\cos(a-b) - \frac{1}{2}\cos(a+b)$?
b) $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\cos(a-b) + \frac{1}{2}\cos(a+b)$?
c) $\sin 2a \sin 2b = \sin^2(a+b) - \sin^2(a-b)$?
d) $-\sin 2a \sin b = \cos^2(a+b) - \cos^2(a-b)$?

105. a) $\text{tang}^2(a+b) - \text{tang}^2(a-b) = \frac{4\sin 2a \sin 2b}{(\cos 2a + \cos 2b)^2}$?

b) $\sin^2(a+b) + \sin^2(a-b) = 1 - 2\cos 2a \cos 2b$?

c) $\cos^2(a+b) + \cos^2(a-b) = 1 + 2\cos 2a \cos 2b$?

106. $\text{tang}^2(a+b) + \text{tang}^2(a-b) = \frac{2(\sin^2 2a + \sin^2 2b)}{(\cos 2a + \cos 2b)^2}$?

107. a) $\frac{2}{\text{cotg}\,a - \text{tang}\,a} = \text{tang}\,2a$? b) $\frac{\text{cotg}\,a - \text{tang}\,a}{\text{cotg}\,a + \text{tang}\,a} = \cos 2a$?

c) $\frac{2\,\text{tang}\,a}{1 + \text{tang}\,a} = \sin 2a$?

108. $\frac{\sin m \pm \sin n}{\cos m + \cos n} = \text{tang}\,\frac{(m \pm n)}{2}$ ir

$\frac{\sin m \mp \sin n}{\cos m - \cos n} = -\text{cotg}\,\frac{(m \pm n)}{2}$?

109. $\frac{\sin a + \sin 3a}{\cos a + \cos 3a} = \text{tang}\,2a$?

110. $\frac{\sin \frac{2}{3}a + \sin \frac{4}{3}a}{\cos \frac{2}{3}a + \cos \frac{4}{3}a} = \text{tang}\,a$?



V Skirsnys.

Apskaitymas trigonometriškųjų dydžių.

38. Trigonometriškos lentelės. Gvaldant trikampius bei kitokius skaičių klausimus, reikia žinoti bei mokėti surasti duotojo kampo trigonometriški dydžiai arba atvirsčiai iš tam tikrų trigonometriškų dydžių surasti atitinkantieji jiems kampai. Tam tikslui yra sudarytos taip vadinamos trigonometriškos lentelės, kurių pasigaunant galima sužinoti kiekvieno kampo trigonometriški dydžiai. Šios lentelės praktikos žvilgsniu turi didelės svarbos. Jų reikšmė pigu suprasti atsiminus, jog sinai ir kosinai yra tai katetai stattrikampių, kurių hipotenuzės yra lygios = 1. Taigi trigonometriškos lentelės talpina savyje visus galimus tos rušies trikampius. Ar šioks mums tektu gvaldyti trikampis ar kitoks, mes visada rasime lentelėse panašų į jį trikampį, kurio šonai išanksto jau yra apskaityti. Iš čia pigu suprasti, kokį patogumą teikia mums tos lentelės gvaldant tiek stattrikampius, tiek aplamai by kokius kitus trikampius.

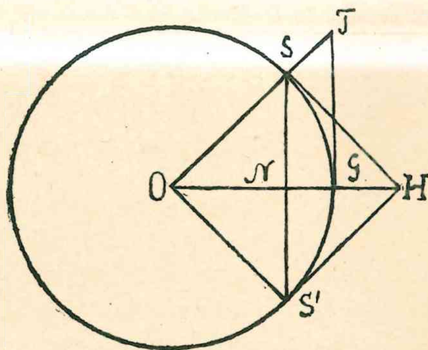
Delei tos priežasties mes čia ir paduosim budą, kuriuo minėtosios trigonometriškos lentelės galima sustatyti, pažymėdami, jog joms užtenka apskaityti trigonometriški dydžiai kampų nuo 0^0 lig 45^0, nes visų didesnių neg 45^0 kampų trigonometriški dydžiai, kaip jau augščiau esam matę, yra pigiai pakeičiami trigonometriškais dydžiais kampų mažesnių neg 45^0.

Trigonometriškųjų dydžių apskaitymas remias šiomis dviem teoremomis:

39. I-ji Teorema. Kiekvienas lankas nuo 0^0 lig 45^0 yra didesnis už savo siną ir mažesnis už savo tangensą.

Ištikrųjų, pažymėkim lanką SG = α (ž. 19 brėž.); teesie lankas SG = S′G; praveskim liečiamasias punktuose S, G ir S′:

SH, TG, S′H; jos visos bus lygios. Sujungę punktus S ir S′ chorda SS′, rasime jog chorda SS′ yra mažesnė neg lankas SGS′ ir kad laužtine liniją SHS′ yra didesnė neg lankas SGS′. O jei taip yra, tai ir lanko SGS′ pusė bus didesnė neg chordos SS′ pusė, bet mažesne neg laužtinės SHS′ pusė. Bet chordos SS′ pusė = SN = sin α; laužtinės SHS′ pusė SH = TG = tang α. Todel galutinai gauname:



19 brėž.

$$\sin\alpha < \alpha;\ \operatorname{tang}\alpha > \alpha\ . \quad (76)$$

40. II-ji Teorema. Liekana tarp neprašokstančio 45⁰ lanko ir jo sino yra mažesnė neg to lanko kubo ketvirtoji dalis.

Ir ištikrųjų, jei lyginyje:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

pakeisim tang $\frac{\alpha}{2}$ mažesniu dydžiu $\frac{\alpha}{2}$ ir $\cos\frac{\alpha}{2} = 1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ mažesniu dydžiu $1 - \frac{\alpha^2}{4}$, tai gausim

$$\sin\alpha > \alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{4}\right) \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (77)$$

$$\text{arba } a - \sin\alpha < \frac{a^3}{4} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (78)$$

Iš šios nelygybės matom, jog pakeičiant siną lanku, daroma klaida mažesnė neg ketvirta dalis to lanko kubo.

Žinodami, jog

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

pakeiskim šiame lyginyje $\sin\frac{\alpha}{2}$ didesniu dydžiu $\frac{\alpha}{2}$; tuomet ir reiškinys $1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ sumažės ir mes gausim:

$$\cos\alpha > 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

o jei tame pačiame lyginyje $\sin\frac{\alpha}{2}$ pakeistumėm mažesniu (slg. 77 form.) dydžiu: $\frac{\alpha}{2} - {}^1/_4 \left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{32}$, tai reiškinys $1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ padidėtu ir mes gautumėm

$$\cos\alpha < 1 - 2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{32}\right)^2;$$

o kadangi $1 - 2.\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{32}\right)^2 = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{16} - \frac{2\alpha^6}{32^2}$, tai juo labiau turės vietos nelygybė:

$$\cos\alpha < 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{16} \text{ arba } \cos\alpha - \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) < \frac{\alpha^4}{16}. \quad (79)$$

Iš čia savaime plaukia išvada, jog skirtumas tarp $\cos\alpha$ ir $1 - \frac{\alpha^2}{2}$ bus mažesnis neg $\frac{\alpha^4}{16}$; taigi daromoji klaida, imant $\cos\alpha$ vietoj $1 - \frac{\alpha^2}{2}$, bus irgi mažesnė neg $\frac{\alpha^4}{16}$.

40. Trigonometriškųjų dydžių apskaitymas mažuose kampuose. Remianties augščiau išrodytais tvirtinimais, galima apskaityti sin 10″ ir cos 10″ artutinai lig 13 dešimtiniam skaitmeniui.

Tam tikslui pažymėję 10″ lanką raide α ir žinodami, jog $\pi = 3{,}14159265358979$3 randame:

$$\alpha = \frac{10\,.\,\pi}{180\,.\,60\,.\,60} = 0{,}000048481368078$$

$$1 - \frac{\alpha^2}{2} = 0{,}99999999882477 8$$

$$\text{O kadangi } \frac{\alpha^3}{4} < {}^1/_4\,(0{,}00005)^3 < 0{,}00000000000032$$

$$\text{ir } \frac{\alpha^4}{16} < \frac{1}{16}\,(0{,}00005)^4 < 0{,}0000000000000000038$$

todel imdami α vietoj sin 10″ ir $1 - \frac{\alpha^2}{2}$ vietoj cos 10″ pa-

darytumėm klaidą mažesnę neg 13-tojo ir 18-tojo po skirsneliui ardo vienetas.

Iš tos priežasties galime drąsiai priimti, jog

$$\sin 10'' = 0{,}0000484813681$$
$$\cos 10'' = 0{,}9999999988248$$

41. Simpsono formulos. Žinant gi sin 10″ ir cos 10″, galima apskaityti sinai ir cosinai visų kitų kampų per kiekvienas 10″. Ir ištikrųjų, jei formulose

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin\alpha \cos\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos\alpha \cos\beta$$

prileisime $\alpha = \mu\beta$, tai iš šių formulų gausime:

$$\sin(\mu + 1)\beta = 2 \cos\beta \sin\mu\beta - \sin(\mu - 1)\beta \quad . . . \quad (80)$$
$$\cos(\mu + 1)\beta = 2 \cos\beta \cos\mu\beta - \cos(\mu - 1)\beta \quad . . . \quad (81)$$

Naudojantis šiomis anglų matematiko Roberto Simpsono išvestomis lygybėmis, galima surasti $\sin(\mu+1)\beta$ ir $\cos(\mu+1)\beta$, jei yra žinomi sinai ir kosinai lankų $\mu\beta$ ir $(\mu - 1)\beta$. Ir ištikrųjų, jei $\beta = 10''$, tai dedant tosna lygybėsna vieton μ paeiliui skaičius 1, 2, 3, 4. . ., rasime:

$$\sin 20'' = 2 \cos 10'' \sin 10''; \ \cos 20'' = 2 \cos 10'' \cos 10'' - 1$$
$$\sin 30'' = 2 \cos 10'' \sin 20'' - \sin 10'';$$
$$\cos 30'' = 2 \cos 10'' \cos 20'' - \cos 10'' \text{ ir tt.}$$

Tuo budu galima apskaityti 10″ tarpais sinai ir kosinai visų kampų nuo 0^0 lig 45^0.

Panorėjus, galima šis apskaitymas sutrumpinti net ir dar labiau; tam tikslui užtenka apskaityti trigonometriški dydžiai kampų lig 30^0, nes formulose:

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin\alpha \cos\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin\alpha \sin\beta$$

prileidus $\alpha = 30^0$, rasime lyginius:

$$\sin(30^0 + \beta) = \cos\beta - \sin(30^0 - \beta) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (82)$$
$$\cos(30^0 + \beta) = \cos(30^0 - \beta) - \sin\beta \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (83)$$

nes sin 30^0, kaipo pusė tobulojo ratan įbrėžtojo šešiakampio šono prie stipino = 1, yra lygus = $1/2$.

Tos pastarosios formulos duoda lengvą budą surasti sinams ir kosinams kampų didesnių neg 30^0, turint sinus ir kosinus kampų mažesnių neg 30^0.

Tuo pat keliu, kuriuo esam gavę sin 10″, cos 10″ dydžius, galima taipgi gauti ir sin 1″, cos 1″ dydžiai, o iš jų ir tolesni sin 2″, cos 2″, sin 3″, cos 3″ ir tt. Bet tie dydžiai, vengiant trigonometriškų lentelių perdidelio gramozdiškumo, paprastai nededama; praktikai skiriamose lentelėse tenkinamasi trigonometriškais dydžiais kampų, perskirtų 10″ arba net ir 1′ tarpais.

42. **Trigonometriškų lentelių sudarymas.** Augščiau išdėtas trigonometriškų dydžių apskaitymas yra gana sunkokas ir teturi vien teoretišką svarbą, nes jo pasigaunant buvo sustatytos pirmutinės trigonometriškos lentelės. Vėliau matematikai yr išdirbę tam tikslui kitus daug lengvesnius apskaitymo budus, paremtus trigonometriškų dydžių išdėstymu nesibaigiamomis eilėmis:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots \quad (84)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots \quad (85)$$

Tų eilių išvedimą, žemiau paduosime. Čia gi laikome reikalinga nurodyti, jog lentelėsna dedami ne patįs trigonometriški dydžiai, bet jų logaritmai, nes apskaitymai dažniausiai vien logaritmais ir tedaroma. Taigi apskaičius sinus ir kosinus kampų nuo 0^0 lig 45^0 ir paėmus jų logaritmus iš paprastų logaritmiškų lentelių, jieškoma toliau tangensų ir kotangensų logaritmai, pasigaunant formulų:

$$\lg \operatorname{tang} x = \lg \sin x - \lg \cos x;$$

$$\lg \operatorname{cotg} x = \lg \cos x - \lg \sin x.$$

Sekansų ir kosekansų logaritmai lentelėsna paprastai nededama, nes

$$\lg \sec x = - \lg \cos x;$$

$$\lg \operatorname{cosec} x = - \lg \sin x$$

Kadangi sinai, kosinai, o taipgi kampų nuo 0^0 lig 45^0 tangensai ir kampų nuo 45^0 lig 90^0 kotangensai yra mažesni neg vienetas, tai jų logaritmai buna neigiamieji, arba imant teigiamasias mantises, turi neigiamasias charakteristikas. Kad išvengus lentelėse neigiamųjų dydžių, kiekvienas tokių logaritmų yra 10-mi padidintas; taigi imant iš lentelės toks logaritmas,

reikia visada turėti atmintyje, kad jis yra 10-mi mažintinas. Trigonometriškų lentelių esama visokių tipų: triženklių (Dreistellige logarithmische und trigonometrische Tafeln, herausgegeben von Dr. O. Richter, Leipzig, Teubner 1907), keturženklių (Vierstellige Logarithmentafeln, zusammengestellt von Dr. A. Schülke, 10. Auflage, Leipzig, Teubner 1917), penkiaženklių (Lalande'o, A. Rodino, August'o Adler'o, Heger'o ir k.), septynženklių (Callet'o, Vegos, Bremikero ir k.). Gimnazijoms tinkamiausi penkiaženkliai, nes triženkliai ir keturženkliai neturi užtektino griežtumo, o septynženkliai yra gana neparankųs, kaipo perdaug gramozdiški. Musų mokykloms geriausiai tiktu penkiaženklės Przevalskio lentelės išleistos Pr. Mašioto (Logaritmų knygos. Vilniuj 1919) ir R. Heger'o (Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln, 2. Auflage, Leipzig, Teubner).

Visų tų lentelių sustatymas yra maž daug vienodas. Jose dedama penkiais dešimtiniais ženklais logaritmai sinų, kosinų, tangensų, kotangensų kampų nuo 0^0 lig 90^0. Nuo 0^0 lig 45 gradų skaičius nurodoma puslapio viršuje, o minučių skaičius dedama pirman stulpelin. Sekančiuose keturiuose stulpeliuose su parašais sin, tang, cotg, cos talpinama atitinkamų trigonometriškų dydžių logaritmai su $1'$ tarpais. Naujesniuose leidiniuose, k. š. Hegero, vieną puslapį užima vien sinai su kosinais, antrą gretimą vien tangensai su kotangensais. Lietuviškame logaritmų leidiny ras skaitytojas gana platų trigonometriškų lentelių aprašymą (VIII—XIX p.), todel čia jo ir nededame.

Bet ar lentelės šiokios butu ar tokios, visos jos tinka dviem uždaviniam gvaldyti: 1) turint tam tikrą kampą, surasti jam atitinkantieji trigonometriški dydžiai ir 2) turint tam tikrą trigonometrišką dydį, surasti atitinkąs jam kampas.

43. Suradimas duotojo kampo trigonometriškųjų dydžių. Jei kampas teturi vien neskaidytą gradų ir minučių skaičių, tai atitinkantieji jam trigonometriški dydžiai randama tiesiog trigonometriškose lentelėse. Pasitaikius kampuose sekundoms ir jų dalims, reikia naudoties lentelių skirtumais, kaip ir apskaitant

paprastuosius logaritmus. Tam dalykui paaiškinti, teesie keletas pavyzdžių.

1. Sakysime, reikia surasti lg sin $23^0 18' 27,'' 5$

Atmetę sekundas, lentelėse surandame:

$$\lg \sin 23^0 18' = 9{,}59720$$

Pastebėję priegtam, jog lentelių skirstumas čia bus 29 ir prileidę, jog maži kampo mainymaisi yra proporcionaliai atitinkančių jiems sinų logaritmų mainymamsi, protaujam šitaip: kampui padidėjus viena sekunda, lg sin didėja $\frac{29}{60}$, kampui padidėjus $27'', 5$, lg sin padidės $\frac{29 \times 27{,}5}{60} = 13{,}3$ (t. y. 13,3 šimtatukstantinių dalių). Vadinas prie lg sin $23^0 18'$ reikia pridėti 13, kad gavus lg sin $23^0 18' 27'', 5$. Veiksmas dėstoma šitaip:

$$\begin{array}{rl} \lg \sin 23^0 18' = & 9.\ 59720 \\ \text{del } 27'', 5 & +13 \\ \hline \lg \sin 23^0 18' 27'', 5 = & 9{,}59733 - 10 \end{array}$$

2. Reikia surasti lg cos $34^0 29' 16'', 4$

Lentelėse surandame:

$$\lg \cos 34^0 29' = 9{,}91608$$

ir pastebėję lentelių skirstumą 9, protaujame šitaip: kampui padidėjus $1''$, lg cos mažėja $\frac{9}{60}$, kampui padidėjus $16'', 4$, lg cos sumažės $\frac{9 \times 16{,}4}{60} = 2, 4$ (2, 4 šimtatukstantinių dalių). Vadinas iš lg cos $34^0 29'$ reikia atimti 2:

$$\begin{array}{rl} \lg \cos 34^0 29' = & 9{,}91608 \\ \text{del } 16{,}4 & -\ 2 \\ \hline \lg \cos 34^0 29' 16'', 4 = & 9{,}91606 - 10 \end{array}$$

3. Surasti tang $59^0 17' 38', 3$:

$$\begin{array}{rl} \lg \operatorname{tang} 59^0 17' = & 0{,}22610 \\ \text{del } 38'', 3 & +\ 19 \\ \hline \lg \operatorname{tang} 59^0 17' 38'', 3 = & 0{,}22629 \end{array}$$

Kartais, užuot ėmus iš lentelių arčiausį logaritmą mažesnį negu jieškomasis, esti patogiau imti arčiausias logaritmas dide-

snis neg jieškomasis, tuomet lg sin ir lg tang taisymas atliekama imstymu, o lg cos ir lg cotg — dėstymu.

44. Budas surasti logaritmams sinų, tangensų ir kotangensų kampuose nuo 0^0 lig 5^0 ir kosinų, kotangensų ir tangensų kampuose nuo 90^0 lig 95^0.

Kadangi mainanties kampui nuo 0^0 lig 5^0 sinas ir tangensas mainos labai palengvėl, tai galima prileisti, kad nurodytose ribose sinas ir tangensas yra proporcionalis kampui. Todel pažymėję lentelėse randamąjį kampą raide a o jo priaugą raide h ir išreiškę kampus a ir a + h sekundomis, galim prileisti, kad

$$\frac{\sin(a+h)}{\sin a} = \frac{a+h}{a} \text{ ir } \frac{\operatorname{tang}(a+h)}{\operatorname{tang} a} = \frac{a+h}{a}$$

iš kur gauname:

$$\lg\sin(a+h) = \lg\sin a + \lg(a+h) - \lg a \quad . \ (86)$$

$$\lg\operatorname{tang}(a+h) = \lg\operatorname{tang} a + \lg(a+h) - \lg a \quad . \ (87)$$

Pasigaunant šių formulų galima net penkiaženkliais logaritmais gana griežtai surasti sinai ir tangensai kampų nuo 0^0 lig 5^0. Pav. reikia surasti lg sin 23′30″. Čia a = 23′ = 1380″; a + h = 23′30″ = 1410″. Todel

$$\begin{aligned} \lg\sin 23' &= 7{,}82545 - 10 \\ \lg(a+h) &= 3{,}14922 \\ \mathrm{pa}\lg\alpha\,^{1)} &= 6{,}86012 - 10 \\ \hline \lg\sin 23'30'' &= 7{,}83479 - 10 \end{aligned}$$

t. y. gavom tokį pat lg sin 23′30″ reiškinį, kaip ir septynženkliais logaritmais.

Kadangi $\operatorname{cotg} a = \frac{1}{\operatorname{tang} a}$, todel lg cotg a = — lg tang a, taigi suradimas logaritmų kotangenso kampuose nuo 0^0 lig 5^0 pareina nuo suradimo logaritmo tangenso tuose pat kampuose.

Kosinai, kotangensai ir tangensai kampuose nuo 90^0 lig 95^0 yra lygus sinams, tangensams ir kotangensams kampuose nuo 0^0 lig 5^0, vadinas, anų logaritmus pigiai surasime, suradę šių pastarųjų logaritmus.

---

[1]) Simboliu palg išreiškiame papildomąjį (rusiškai dopolnitelnyj) logaritmą; jo išaiškinimą dedame žemiau 69 psl.

45. Klaidos apskaitant kampus trigonometriškų dydžių logaritmais. Apskaitymas kampo trigonometriškų dydžių logaritmais dažnai buna gana negriežtas. Pavyzdžiui jei reiktu surasti kampas turint lg cos x = 9,99996, tai lentelėse rastumėm, jog tam logaritmui atitinka net šeši kampai nuo 44′ lig 49′; paėmę vieną iš jų padarytumėm klaidą galinčią siekti lig 5′; vadinas, mes negalėtumėm nustatyti netik sekundų, bet nei pačių minučių skaičiaus. Norėdami turėti bendrą supratimą tų klaidų, pabandykim surasti jų ribas.

Te D reiškia dvejų gretimų logaritmų lentelėse skirtumą, kuris, kaip žinom, yra išreiškiamas šimtatukstantinėmis dalimis.

Tatai jei mainanties logaritmui D skaičium, kampas mainasi 60″, tai persimainius kampui 1 šimtatukstantine dalimi, kampas persimainys $\frac{60''}{D}$. Bet visi lentelių ir šiaip jau penkiaženkliai logaritmai skiriasi nuo tikrųjų mažiau neg viena šimtatukstantine dalimi, todel visi surandamieji tais logaritmais kampai skirsis nuo tikrųjų mažiau neg $\frac{60''}{D}$. Tuo budu daromoji apskaitant kampus klaida bus mažesnė negu $\frac{60''}{D}$ ir todel mažtant D, ji didės. Iš čia aišku, jog kampai surandamieji tose lentelių vietose, kame lentelių skirtumas yra nedidelis, bus labai negriežti.

Kadangi lentelių skirtumas tarp logaritmų sinų kampuose nuo 0^0 lig 11 yra didesnis neg 60, tai klaida jieškant kampo tose ribose bus $< \frac{60''}{60}$, t. y. $< 1''$; toliau klaida didėja ir prie 45^0 ji siekia 5″. Priešingai esti jieškant kampo iš kosino logaritmo. Tuo budu kampai mažesni neg 45^0 surandama negriežtai iš kosinų, o didesni neg 45^0 — iš sinų.

Jei mes peržiurėsim lentelių skirtumus tarp gretimų tangensų ir kotangensų logaritmų, tai pastebėsim, kad pats mažiausis skirtumas (prie 45^0) yra lygus 25, todel klaida apskaitant kampą iš tangenso bei kotangenso visada esti mažesne

neg $\frac{60''}{25}$ arba $< 2'',4$. Todel ir patariama kampų apskaityme naudoties tangensais bei kotangensais.

Septynženklės trigonometriškos lentelės yra sustatytos panašiu budu kaip ir penkiaženklės: naudojamasi septynženkliais logaritmais vien ten, kur reikalaujama didelio griežtumo, kaip šit astronomijos bei augštesnės geodėzijos apskaitymuose. Šiaip jau gi matininkų darbuose, kame kampai matuojami artutinai griežtumu nedidesniu per 30″, penkiaženkliai logaritmai yra visai užtektini.

Naudojantis logaritmais visi painesni apskaitymai žymiai palengvėja, nes logaritmuojant, dauginimas pakeičiama dėstymu, dalymas — imstymu, laipsniavimas ir šaknų ješkojimas dauginimu bei dalymu rodyklių. Galima net ir dar labiau suprastinti apskaitymai, pakeičiant juose ir imstymą dėstymu; tam tikslui užuot atėmus kokį logaritmą pridedama jo aritmetiškasai papildymas, kuris gaunama atimant duotajį logaritmą iš dešimties. Kad tai geriau suprastumėm, imkim beadrą pavyzdį:

$$\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b$$

tai bus imstymo žygis. Bet ši lygybė nepersimainys, jei jos antrai daliai priduosime ir atimsime po 10; tai padarę gausime:

$$\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b + 10 - 10 = \lg a + (10 - \lg b) - 10.$$

Papildymas $10 - \lg b$ pigiai apskaitoma atmintinai, nes čia kiekvienas logaritman įeinantis skaitmuo reikia atimti iš 9, atskyrus paskutinį, kurs reikia imti iš 10. Taigi papildomasis logaritmas visada galima be vargo išrašyti tiesiog iš lentelių. Tuo budu sudėję $\lg a$ ir papildamąjį $\lg b$, žymimąjį simboliu *palgb* gausime dėstymu $\lg \frac{a}{b}$, tik pabaigoj reikia neužmiršti iš apskaitymo rezultato atimti 10.

Užbaigai teesie pora skaitmeninių pavyzdžių.

1) Apskaityti lankas x,

jei jo $\sin x = -\frac{2,34 \cos^2 49^0 30' 25'' \sqrt{1,35}}{17.385 \sqrt[3]{\text{tang } 11^0 45'}}.$

Logaritmuojame šį reiškinį nežiurėdami ženklo —; bet kad neužmirštumėm, jog skaitmuo atitinkąs tam logaritmui yra neigiamasis, dedame prie logaritmo raidę *n* (neigiamasis); taigi duotasai reiškinys logaritmavimu įgaus šią formą:

$$\lg \sin x = \lg 2{,}34 + 2 \lg \cos 49^0 30' 25'' + {}^1/_2 \log 1{,}35 - (\lg 17{,}385 + {}^1/_8 \lg \operatorname{tang} 11^0 45') \ (n)$$

Nun iš lentelių gauname:

$$\lg 2{,}34 = 0{,}36922$$
$$2 \lg \cos 49^0 30' 25 = 9{,}62496$$
$${}^1/_2 \log 1{,}35 = 0{,}06516$$
$$\lg \text{skaitiklio} = 0{,}05934$$

$$\lg 17{,}385 = 1{,}24017$$
$${}^1/_8 \lg \operatorname{tang} 11^0 45' = 9{,}77269$$
$$\lg \text{vardiklio} = 1{,}01286$$
$$\lg \sin x = 9{,}04648 \ (n)$$

Atitinkąs šiam logaritmui kampas yra $6^0 23' 24''$; bet kadangi sinx yra neigiamas, o neigiamieji sinai randas vien dviejose pastarose ratilo ketvirtyse, tatai visumažiausis teigiamojo lanko dydis bus $x = 180^0 + 6^0 23' 24 = 186^0 23' 24''$.

2) $\operatorname{cotg} \sqrt[20]{\operatorname{cosec} (2\pi^{-1})}$ pakelti laipsniu $= 0{,}01$?

Nustatykim pirmiausia, kiek gradų, minučių, sekundų turės lankas, kurio ilgis prie stipino $= 1$ yra lygus $2\pi^{-1}$. Kadangi $2\pi = 360.60.60 = 1296000''$, tai y sekundų atitinkančių lankui $2\pi^{-1}$ gausime iš proporcijos $y : 1296000'' = 2\pi^{-1} : 2\pi$, iškur $y = 1296000 . 2\pi^{-2}$. Apskaitę šį reiškinį logaritmais (prie $\pi = 3{,}142$), rasime jog $y = 36^0 28'$. Nun reikia apskaityti reiškinys $\sqrt[20]{\operatorname{cosec} 36^0 28'} = \sqrt[20]{\frac{1}{\sin 36^0 28'}}$; jo logaritmas bus $=$ $\frac{\lg 1 - \lg \sin 36^0 28'}{20} = \frac{-\lg \sin 36^0 28'}{20} = \frac{-(9{,}77405 - 10)}{20} = \frac{-9{,}77405 + 10}{20} = \frac{0{,}22595}{20} = 0{,}01129$. Suradę šiam logaritmui atitinkantį skaičių, gausime lygybę $\sqrt[20]{\operatorname{cosec} (2\pi^{-1})} = 1{,}0263$. Šis skaičius reiškia tam tikrą lanką prie stipino $= 1$, taigi norint surasti to lanko cotg, reikia išreikšti jis gradais, minutėmis, sekundomis. Šį skaičių *z* gausime iš proporcijos $z : 1296000'' = 1{,}0263 : 2\pi$; rasime, jog $z = 58^0 47' 50''$. To lanko cotg pakelti laipsniu $= 0{,}01$, reikia lgcotg $58^0 47' 50''$ padauginti skaičium

0,01, arba padalinti 100-u (kas vis vien); rasime $\frac{9,78225 - 10}{100.}$ $= 9,99782.25$. Atmetę dų pastaruoju šio logaritmo skaitmeniu ir sujieškoję jam atitinkantį skaičių, kurio lg yra 9,99782, rasime jieškomąjį dydį = 0,995.

Mokėjimas logaritmais daryti apskaitymus, kad ir nesunkus dalykas, tečiau reikalauja tam tikro įgudimo, kurį tegamina vien praktika. Taigi ir patariame skaitytojams lavinties apskaitymuose gvildenant daugiau panašių skaitmeninių uždavinių.

Uždaviniai:

111. Apskaityti sin, cos, tang lanko $22^0 30'$ ir $11^0 15'$?
112. Apskaityti sin, cos, tang lanko 60^0, 15^0, $7^0 30'$?
113. Apskaityti sin 18^0 ir cos 36^0.
114. Apskaityti trigonometriškos funkcijos šių lankų: 225^0? 570^0? 660^0? -378^0? -855^0? -378^0? $-{}^2/_3\pi$? ${}^2/_5\pi$? $11^1/_3\pi$? $-7^2/_3\pi$?

Surasti sin, cos, tang, cotg logaritmai šių lankų:

115. $33^0 12'$? $59^0 18'$? $3^0 5'$? 80^0? $42^0 15' 10''$? $63^0 18' 24''$? $0^0 7' 8''$? $60^0 42' 6''$? $70^0 30' 48''$?
116. $93^0 20' 3''$? $163^0 18' 28''$? $230^0 38' 50''$? $360^0 40' 20'',4$?
117. $380^0 40'$? $396^0 4' 18''$? $643^0 54' 8'',4$? $1630^0 18'$?
118. Surasti kampai atitinkantieji šiems trigonometriškų funkcijų logaritmams: $\lg \sin x = 9,83794$; $\lg \cos y = 9,93105$; $\lg \operatorname{tang} z = 0,24731$; $\lg \operatorname{tang} x = 9,87654$?
119. Surasti sec ir cosec logaritmai šių lankų: 26^0? 73^0? $34^0 17'$? $76^0 39'$? $66^0 40' 20''$? $76^0 8' 54''$? $136^0 20'$? $170^0 34' 28'',6$? $119^0 40'$? $215^0 37'$? $289^0 3' 47'',4$? $396^0 27' 8''$? $1214^0 58'$?
120. Surasti trigonometriški dydžiai lankų: 40^0; 370^0; $15^0 18'$; $28^0 36' 40''$; $74^0 24' 58''$; $80^0 43' 8'',6$; $119^0 40'$; $216^0 3' 42''$; $296^0 10' 34'',5$; $320^0 3'$; $51^0 78' 30''$ iš jų logaritmų;
121. Apskaityti reiškinį; $\frac{2 \sin^2 13^0 \sqrt{3,75^3}}{3 \sqrt{0,36984}}$?
122. Surasti kampą x, jei $\operatorname{tang} x = -\frac{2 \sin^2 138^0 \cos 63^0}{3 \operatorname{tang} 18^0 \cos 49^0}$?

jei $\sin x = \frac{0,349^2 \operatorname{tang} 41^0 24'}{\sin^2 2^0 45'}$?

Apskaityti reiškinį:

123. $x = \frac{23{,}6 \sqrt{2/5}}{7 \sin 17^0 45'}$? 124. $x = \frac{3{,}6 \sqrt[3]{0{,}496}}{0{,}47 \operatorname{tang} 11^0 42,}$?

125. $x = \sqrt[30]{\cos \sqrt[40]{\sin \sqrt[50]{0{,}5}}}$?

126. $\sin x = \sqrt[10]{0{,}001} - \sqrt[62]{(\operatorname{tang} 40^0 26'')^{0{,}16} (\sec 36^0 14' 18'')^{-0{,}288}} \ldots$

127. Parodyti, jog $\operatorname{arctang} {}^3/_4 = 2 \operatorname{arctang} {}^1/_3$.

128. Surasti dydį $\sin (\arcsin {}^1/_2 + \arccos {}^1/_2)$?

129. Surasti dydį $\operatorname{tang} (\operatorname{arctang} x + \operatorname{arccotg} x)$?

Pasigaunant padedamojo kampo apskaityti reiškiniai

130. $x = (\sqrt[4]{8} + \sqrt[4]{3}) \sin 10^0$? 21. $x = 2{,}4567. (\sqrt[3]{4} + \sqrt[4]{10})$?

132. Sužinoti kiek kartų lankas $75^0 3'$ yra didesnis neg jo sinus ir mažesnis neg jo tangensas?

Pasigaunant padedamojo kampo išgvildenti šie lyginiai:

133. $x^2 + 360{,}42\, x - 3489{,}1 = 0$.

134. $x^2 + p x - q = 0$, jei $\lg p = 2{,}91433$, $\lg q = 3{,}00549$?

135. $x^2 + p x + q = 0$, jei $\lg p = 3{,}06785$; $\lg q = 1{,}78609$?

136. $x^2 + 0{,}56487 x + 0{,}02564 = 0$?

137. Surasti dydžiai $\sin 67^0 23' 8''$; $\cos 15^0 17',3$; $\operatorname{tang} 72^0 18' 50''$; $\sec 34^0 20' 40''$; $\operatorname{cotg} 38^0 22' 34''$ iš jų logaritmų.

138. Surasti dydžiai $\operatorname{cosec} 40^0 2' 10''$; $\sin 136^0 54' 20''$; $\cos 243^0 50'$; $\operatorname{tang} 120^0 28' 40''$; $\operatorname{cotg} 260^0 40' 30''$; $\sec 118^0 44'$, $\sin 3823^0$ iš jų logaritmų?

139. Surasti x iš lyginio: $(\sin 16^0 19'')^{\operatorname{tang} x} = \cos 16^0 19''$?

140. Apskaityti $x = \sqrt[25]{\sin 200^0}$? $x = (\cos 5^0 6')^{-0{,}07}. \sin 67^0 2'$? $(\cos x)^{\sin x}$ prie $x = 2^0$.

VI Skirsnys.

Trigonometriško lyginio gvaldymas.

46. Trigonometriškos lygybės ir lyginiai. Lygybė vadinama trigonometriška, jei joje nežinomasai dydis stovi po by kokios trigonometriškosios funkcijos ženklu. Pav. $\sin x + \cos x = 1$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ bus trigonometriškos lygybės.

Trigonometriškos lygybės dalinama dviem rušim: tapatybių ir lyginių.

Trigonometriškaja tapatybe vadinama toki trigonometriška lygybė, kuri esti teisinga prie by kokių nežinomojo kampo reikšmių; pav. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Trigonometriškuoju lyginiu vadinasi toki trigonometriška lygybė, kuri esti teisinga tiktai prie kaikurių nežinomojo kampo reikšmių; tos reikšmės vadinama lyginio šaknimis. Lyginys, kurs yra sudarytas iš vieno tik kampo funkcijų vadinas trigonometriškuoju lyginiu vienu nežinomuoju, pav. $\sin x + \cos x = 1$; jei yra sudarytas iš dviejų kampų funkcijų, tai — dviem nežinomais, pav. $\sin x + \sin y = 0{,}6$ ir tt.

Išgvaldyti toks lyginys reiškia surasti by koki nežinomojo kampo funkcija, o turint ją, sužinoti ir pats kampo dydis.

Jei lyginin teįeina tik viena ješkomojo kampo trigonometriškoji funkcija, tai jis gvildoma paprastais algebros budais. Pav. turėdami lyginį: $\sin^2 x = 1{,}3 - 2 \sin x$, perkeliam antrosios dalies narius pirmojon ir gvaldydami jį kaipo paprastąjį kvadratinį randame

$$\sin x = -1 \pm \sqrt{1+1{,}3} = -1 \pm \sqrt{2{,}3}\,.$$

Čia reiškinys $\sqrt{2,3}$ negalima imti su ženklu —, nes sino dydis visada esti mažesnis neg 1; taigi tikroji to lyginio šaknis bus vien $\sin x = 0{,}51$.

Jei lyginin įeina dvi ar daugiau nežinamojo kampo funkcijų, tai jis pakeičiama lyginiu teturinčiu tik vieną funkciją. Tasai pakeitimas dažniausiai daroma įstatant vietoj vienos trigonometriškos funkcijos jai lygų reiškinį sudarytą iš kitos funkcijos, remianties lygybėmis (27), (28) arba kitokiomis išvestomis iš pamatinių lygybių nuo (19) lig (26).

47. Trigonometriškų lyginių gvaldymo pavyzdžiai.

1. $\cos x + \sec x = 4.$

Remianties lygybe (21) turime:

$$\cos x + \frac{1}{\cos x} = 4 \text{ arba } \cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0.$$

2. $\cos^2 x = {}^3/_4 + \sin x\ (\sin x + \cos x).$

Įvykdę nurodytą dauginimą, gauname:

$$\cos^2 x = {}^3/_4 + \sin x + \sin x \cos x \text{ arba}$$
$$\cos^2 x - \sin^2 x = {}^3/_4 + \sin x \cos x$$

iškur galop remianties form. (60) ir (61) randame

$$\cos 2x = {}^3/_4 + {}^1/_2 \sin 2x$$

Išreikšdami čion $\cos 2x$ reiškiniu $\sqrt{1 - \sin^2 2x}$ ir pakėlę abi lyginio dali kvadratan gausime paprastąjį kvadratinį lyginį.

Kai kada esti lengviau suvienodinti ir išgvaldomu padaryti lyginys ne dauginimu bet dalymu. Pavyzdžiui jei duotąjį antrojo pavyzdžio lyginy nemainomąjį ${}^3/_4$ pakeistumėm jam lygiu reiškinių ${}^3/_4\ (\sin^2 x + \cos^2 x)$ ir padalintumėm abi lyginio dali reiškiniu $\cos^2 x$, tai tiesiog gautumėm:

$$1 = {}^3/_4 + {}^3/_4 \operatorname{tang}^2 x + \operatorname{tang}^2 x + \operatorname{tang} x.$$

Tolesnis gvaldymo kelias savaime aiškus.

3. $x - y = A;\ a \sin x - b \sin y = 0.$

Pakeitę 2-me lyginy x jam lygiu reiškiniu $A—y$ iš pirmojo lyginio gauname:

$$\alpha \sin (A - y) - b \sin y = a \sin A \cos y - \cos A \sin y - b \sin y = 0.$$

Dalydami abi dali reiškiniu $\sin y$, rasime:

$$a \sin A \operatorname{cotg} y - a \cos A - b = 0$$

iškur $\operatorname{cotg} y$ lengva gauti.

4. $\sin x \cos y = p;\ x - y = a.$

Remianties antruoju lyginiu, gauname

$$\sin x = \sin (a + y) = \sin a \cos y + \cos a \sin y$$

įstatydami šį reiškinį vieton $\sin x$ pirman lyginin, rasime:

$$\sin a \cos^2 y + \cos a \sin y \cos y = p.$$

Pakeisdami p reiškiniu $p(\sin^2 y + \cos^2 y)$ ir dalydami abi dali reiškiniu $\cos^2 y$ randame:

$$\sin a + \cos a \operatorname{tang} y = p + p \operatorname{tang}^2 y.$$

Iš kur lengva surasti $\operatorname{tang} y$.

Tie pat 4-jo pavyzdžio lyginiai galima dar gvaldyti ir šitaip. Iš antro lyginio turime:

$$\sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin a$$

arba $$p - \cos x \sin y = \sin a,$$

iškur $$\cos x \sin y = p - \sin a$$

Dėstydami šį lyginį su pirmuoju, rasime:

$$\sin x \cos y + \cos x \sin y = 2p - \sin a$$

arba $\sin(x + y) = 2p - \sin a.$

Iš čia rasime $x + y$; o turėdami $x - y$ pigiai surasime ir x, y.

Jei reikia surasti kampas, tai kartais lyginys galima gvaldyti ir pasigaunant padedamojo kampo. Pav. teesie lyginys:

$$\cos x + p \sin x = 9$$

Ar šioks bus *p* ar toks, visados galima prileisti $p = \operatorname{tang} y$, todel turėsime:

$$\cos x + \operatorname{tang} y \sin x = 9, \text{ arba}$$

$$\cos x + \frac{\sin y}{\cos y} \sin x = 9 \text{ arba}$$

$$\frac{\cos x \cos y + \sin x \sin y}{\cos y} = 9 \text{ arba}$$

$$\frac{\cos(x - y)}{\cos y} = 9,$$

iš kur surandame $x - y$, o todel ir x, apskaitę pirma y iš lyginio $p = \operatorname{tang} y$.

5. Išgvaldyti lyginys $\sin(\cos x) = \cos(\operatorname{tang} x)$

Teesie $\cos x = a$, tuomet $\operatorname{tang} x = \frac{\sqrt{1 - a^2}}{a}$. Todel duotajam lyginiui galime priduoti šią išvaizdą

$$\sin a = \cos \frac{\sqrt{1 - a^2}}{a}, \text{ arba } \sin a = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{1 - a^2}}{a}\right).$$

Iš čia remdamies formula (46) gausim du lyginiu:

$$2n\,\pi + a = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \text{ ir } 2\,(n+1)\,\pi - a = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{1-a^2}}{2}$$

iš kurių rasime a. Žinodami gi a rasime iš lyginio $\cos x = a$ ir x'o reikšmes.

48. Užlaikytinas trigonometriškus lyginių gvaldant atsargumas. Tariamės busiant neprošalį pažymėjus čia atsitikimus, kuomet lyginys gali prarasti savo šaknis bei įgyti pašalinių.

Aplamai lyginys įgija pašalinių šaknų: a) dauginant jo abi pusi neskaidytu reiškiniu, kurin įeina nežinomasai dydis; įgijama tos šaknįs, kurios daugiklį paverčia zeru; b) keliant abi jo pusi kvadratan (bei kitokin laipsnin).

Pavyzdžiai. 1 Teesie lyginys:

$$\sin x - \cos x = 1{,}4.$$

Perkeldami $\cos x$ antron pusėn, keldami abi pusi kvadratan, ir pakeisdami $\sin^2 x$ reiškiniu $1 - \cos^2 x$, gvaldome gautąjį lyginį ir gauname rezultate dvi pašalini šakni: $\sin x = -\,^3/_5$ ir $\cos x = -\,^4/_5$ nepatenkinanti duotojo lyginio. Jį tepatenkina tik $\sin x = \,^4/_5$, $\cos x = -\,^3/_5$.

2 Teesie lyginys:

$$\frac{\sin x \tang x}{1 - \cos x} = \,^9/_4.$$

Daugindami abi lyginio dali padaugu $4\,(1 - \cos x)$, gauname lyginį,

$$5\cos^2 x - 9\cos x + 4 = 0:$$

kurio šaknįs bus: $\cos x = 1$ ir $\cos x = 0{,}8$. Pirmoji nėra duotojo lyginio šaknis, nes ji kairiąją lyginio pusę paverčia nenustatomybe $^0/_0$, kuriai ištirti pakeiskim $\tang x$ reiškiniu $\frac{\sin x}{\cos x}$; tuomet gausim $\frac{\sin x \,.\, \sin x}{(1 - \cos x)\,.\,\cos x}$ arba $\frac{\sin^2 x}{(1 - \cos x)\cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{(1 - \cos x)\cos x} = \frac{1 + \cos x}{\cos x}$. Įstatant čion 1 vieton $\cos x$, gausime 2, o ne $^9/_4$. Pašalinę šaknį rasime prileisdami: $4\,(1 - \cos x) = 0$.

Iš kitos šalies lyginys gali ir prarasti šaknis. Tai pasitaiko, kuomet jis daloma reiškiniu, kurin įeina nežinomasai dydis;

šiame atvejyje prarandama tos šaknįs, kurios paverčia daliklį zeru. Pav. lyginy $\sin^2 x + 0{,}2 \cos^2 x + 2 \sin 2x = 1$, pakeičiant antros pusės 1 jam lygiu reiškiniu $\sin^2 x + \cos^2 x$ ir dalant abi dali reiškiniu $\cos^2 x$ prarandama šaknis $\cos x = 0$.

Gvaldant lyginį tipo $ABC\ldots = 0$, kame A, B, C yra priklausantieji nuo nežinomojo dydžio, reikia visada atminti, kad padaugas gali buti lygus zerui, kuomet bent vienas iš daugiklių yra lygus zerui, nors likusieji gali buti lygųs by kokiam užbaigtam skaičiui. Iš tos priežasties, prileidžiant paeiliui $A = 0$, $B = 0$ ir tt., galim gauti šaknų nepatenkinančių duotojo lyginio. Tai bus tada, kuomet vienas koks daugiklis pav. $A = 0$, o kitas pav. B tuo pačiu laiku bus lygus $= \infty$. Nes tuomet padaugas $ABC\ldots$ įgaus nenustatomybės žymę: $0 \cdot \infty$ ir jo tikroji reikšme gali ir nebuti lygi zerui.

Pav. teesie lyginys: $\sin x = 4 \cos x$. Perkėlę $4 \cos x$ pirmon pusėn ir pastatę $\sin x$ už skliautelių, gausime:

$$\sin x\,(1 - 4 \operatorname{cotg} x) = 0$$

iškur rasime: $\sin x = 0$ ir $1 - 4 \operatorname{cotg} x = 0$.

Bet pirmoji iš tų šaknų $\sin x = 0$ nepatenkina lyginio, nes prie $\sin x = 0$, antrasai daugiklis

$$1 - 4 \operatorname{cotg} x = 1 - 4 \frac{\cos x}{\sin x} = 1 - 4 \cdot {}^1\!/_0 = -\infty.$$

Tikroji padaugo $\sin x\,(1 - 4 \operatorname{cotg} x)$ reikšme yra lygi $\sin x - 4 \cos x$, kuri prie $\sin x = 0$ tampa lygi $= -4$, o ne zerui.

49. Bendroji išvada. Augščiau paduotieji pavyzdžiai parodo, kad bendros trigonometriškiems lyginiams gliaudyti kelias yra šitoks: pirmiausia reikia duotuose lyginiuose visos trigonometriškosios funkcijos išreikšti viena kokia. Tam tikslui reikia naudoties atitinkančiomis formulomis bei pakeitimais, bet kiek galima reikia vengti formulų, kuriuosna įeina radikalai, nes paliuosuojant nuo jų lyginiai, prisieitu kelti tam tikran laipsnin, kuomi apsunkinama gliaudymas ir neretai įvedama pašalinės šaknįs.

50. Budas trigonometriškų lyginių šaknims apibendrinti. Augščiau paduotuose pavyzdžiuose mes esam parodę, kaip surasti mažiausiąją reikšmę lanko patenkinančio duotąjį lyginį. Bet, kaip žinom (sk. II Skirsnį), vienai by kokiai trigonometriš-

kai funkcijai atilinka begalės kitų didesnių lankų. Visi tie lankai reikia laikyti irgi duotojo lyginio šaknimis ir galima jie išreikšti keliomis bendromis formulomis. Pav. gvildendami lyginį $\cos^2 x = \sin x$ rasime, jog $\sin x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; tam sinui atitinkąs lankas bus $38^0 10' 22''$. Bet tam pačiam sinui atintinka ir lankas $180^0 - 38^0 10' 22''$, delto kad $\sin(180^0 - \alpha) = \sin \alpha$. Pridavę tiem dviem lankam by kokį neskaidytą ratilų skaičių n, gausime bendras abiem lankam formulas: $360^0 . n + 38^0 10' 22''$ ir $360^0 . n + 180 - 38^0 10' 22''$, kame n gali turėti visokias neskaidytas reikšmes, užvertas ribose tarp $-\infty$ ir $+\infty$. Abiem tiem dviem formulom galima priduoti dar ir kitokia išvaizda, butent: $x = 2n . 180^0 + 38^0 10' 22''$ ir $x = (2n+1) . 180^0 - 38^0 10' 22''$ arba net galop ir sujungti jiedvi abidvi į vieną:

$$x = n . 180^0 + (-1)^n . 38^0 10' 22''.$$

Ir aplamai, jei turime lyginį $x = \text{arc} \sin y$ ir jei gvildendami jį radom iš lentelių, jog $x = a$, tai toji reikšmė atitiks ir lankams: $180 - a$, $n . 360^0 + a$ ir $n . 360^0 + 180 - a$, kurie, kaip ką tik parodėme, bus galima išreikšti viena bendra formula:

$$x = \text{arcsin} y = n . 180^0 + (-1)^n a$$

Panašiu budu rasime, jog

$$x = \text{arcsin}(-y) = n . 180^0 - (-1)^n a \quad . \quad . \quad (88)$$

$$x = \text{arccos} y = 2n . 180^0 \pm a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89)$$

$$x = \text{arccos}(-y) = (2n+1)\, 180^0 \pm a \quad . \quad . \quad (90)$$

$$x = \text{arctang} y = n . 180^0 + a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (91)$$

$$x = \text{arctang} y (-y) = n . 180^0 - a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (92)$$

Pav. reikia sužinoti bendras išgvaldymas lyginio:

$$\cos^3 x + \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - 3 \sin^3 x = 0$$

Kadangi visi pirmos lyginio dalies nariai yra neaugštesni 3-jo laipsnio, o antroji dalis lygi zerui, tat padalykim jį reiškiniu $\sin^3 x$; tuomet gausim

$$\text{cotg}^3 x + \text{cotg}^2 x - 3 \text{cotg} x - 3 = 0$$

arba skaidant šį lyginį daugikliais, rasime

$$(\text{cotg} x + 1)(\text{cotg}^2 x - 3) = 0$$

iškur gausim

$$\text{cotg} x + 1 = 0 \text{ ir } \text{cotg}^2 x - 3 = 0$$

Gvaldydami: tuodu lyginiu galutinai gauname:

$$\cot g x = -1 \text{ ir } \cot g x = \pm \sqrt{3}, \text{ arba}$$

$$\tan g x = -1, \tan g x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Sujieškoję lankus iš teigiamųjų tangenso reikšmių, rasime jog jie bus lygus 45^0 ir 30^0. Pritaikę augščiau paduotąją (91) bendrą arktangensams formulą, rasime bendrą duotojo lyginio išgvaldymą pavidale:

$$x = n.180^0 - 45^0; \; x = n.180^0 \pm 30^0.$$

Iš to matom, jog trigonometriškieji lyginiai gali turėti nesuskaitomą šaknų daugybę. Delei to jie ir vadinama transcedenčiais lyginiais ir skiriama nuo algebrinių lyginių, kurie teturi visada tik tam tikrą lyginio rodikliu nustatomą suskaitomą skaičių.

Uždaviniai:

141. Surasti $\sin x$ iš lyginio: $\sin x . \cos x = m$? Kiek šaknų turi lyginys $\sin x = 0$.
142. Surasti $\operatorname{cosec} x$ iš lyginio: $\sin x . \cos x = {}^1/_2$?
143. Surasti $\tan g x$ iš lyginio: $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2+b^2}$?
144. Surasti $\cos x$ iš lyginio: $\frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{1}{\cot g x} = 2$?
145. Surasti $\tan g x$ iš lyginio: $(m \sin x + n \cos x)^2 = m^2+n^2$?
146. Surasti $\sin x$ iš lyginio: $\sin x \sqrt{3} + \cos x = \sqrt{3}$?

Surasti $\tan g x$ iš lyginių:

147. $\frac{2 \tan g x + 3 \cot g x}{4 \tan g x - 6 \cot g x} = \frac{\cos x + 5 \sin x}{2 \cos x - 10 \sin x}$?
148. $\cos^2 x - \sin^2 x + \tan g^2 x = {}^5/_6$?

Surasti $\sin x$ ir $\sin z$ iš lyginių:

149. $\sin z = \tan g x; \; \sin x = \cot g z$?
150. $\sin^2 x + \cos^2 z = a; \; \cos^2 x - \sin^2 z = b$?

Surasti $\sin x$, $\sin y$, $\sin z$ iš lyginių:

151. $\sin x = \cos y, \; \sin y = \tan g z, \; \sin z = \cot g x$?
152. $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z = \cos^2 x + \cos^2 y - \cos^2 z = \tan g^2 x - \tan g^2 y + \tan g^2 z = 1$?

153. Surasti sinx, siny, sinz, sint iš lyginių:
$\sin x = 2\sin y$; $\sin y = 2\sin z$; $\sin z = 2\sin t$;
$\cos t = \sin x + \sin y + \sin z - 6\sin t$?

Surasti x iš lyginių:

154. $\tan x - \cot x = 0$?
155. $\sin x - \cos x = 0$?
156. $\sin x + \cos x = 0$?

Išgvaldyti lyginiai:

157. $\tan (x + a) + \tan (x + a) = 2\cot x$?
158. $\tan a \tan x = \tan^2 (a + x) - \tan^2 (a - x)$?
159. $a\cos x = b\sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}}$?
160. $\tan x + \cot x = 4\cot 2x$
161. $a\sin x + b\tan x = c\sin 2x$?
162. $\frac{\tan 2x}{\tan x} - \frac{\tan x}{\tan 2x} = 2$?
163. $\tan\frac{x}{2} = \operatorname{cosec} x - \sin x$?
164. $\sin x + \sin z = 0{,}4$; $x - z = 16^0$?
165. $\cos^2 (a + x) + \cos^2 (a - x) = m$
166. $x + z = a$; $\sin x : \sin z = m$
167. $x + z = a$; $\tan x + \tan z = m$
168. $\sin (a + x) = m \sin (x - a)$?

Surasti bendra lanko x išraiška, atitinkanti lyginiams:

169. $\cos x - \cos 2x = 1$?
170. $\sec x = \sin x + \cos x$? $4\sin^2 x + \sin^2 2x - 3 = 0$.

Antroji dalis.

(Tiesialinijine trigonometrija.)

VII Skirsnys.

Pamatiniai lyginiai tarp kiekvieno trikampio elementų.

51. Lyginiai jungiantieji trikampio kampus. Kaip jau įžangoje (2·§) esam minėję, trigonometrija užsiima trikampio elementų apskaitymu, pasigaudama lyginių, jungiančių tuos elementus, t. y. šonus ir kampus. Tų lyginių išvedimu mes čia nun ir užsimsime.

Tam tikslui raidėmis α, β, γ pažymėsime trikampio kampus, o raidėmis a, b, c gulinčiuosius prieš tuos kampus jo šonus.

Kiekvieno trikampio kampams geometrija duoda šį lyginį:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (93)$$

iš kur gauname kitą:

$$\alpha + \beta = 180^0 - \gamma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (93')$$

iš čia gi randame, jog

$$\left.\begin{aligned} \sin\ (\alpha+\beta) &= \sin\ (180^0-\gamma) = \sin\gamma \\ \cos\ (\alpha+\beta) &= \cos\ (180^0-\gamma) = -\cos\gamma \\ \text{tang}\ (\alpha+\beta) &= \text{tang}\ (180^0-\gamma) = -\text{tang}\gamma \\ \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) &= \sin\left(90^0-\frac{\gamma}{2}\right) = \cos\frac{\gamma}{2} \\ \cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) &= \cos\left(90^0-\frac{\gamma}{2}\right) = \sin\frac{\gamma}{2} \\ \text{tang}\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) &= \text{tang}\left(90^0-\frac{\gamma}{2}\right) = \text{cotg}\ \frac{\gamma}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (94)$$

Toliau plaukia dar ir šie tarp trikampio kampų santikiavimai:

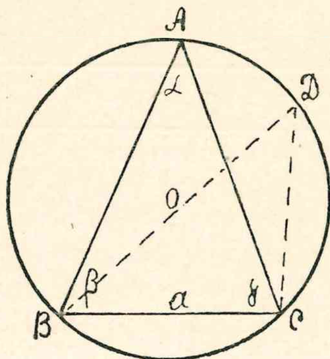
$$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \\ \tang\alpha + \tang\beta + \tang\gamma = \tang\alpha \cdot \tang\beta \cdot \tang\gamma \\ \cotg\frac{\alpha}{2} + \cotg\frac{\beta}{2} + \cotg\frac{\gamma}{2} = \cotg\frac{\alpha}{2} \cdot \cotg\frac{\beta}{2} \cdot \cotg\frac{\gamma}{2} \end{array}\right\} (95)$$

ir tt.

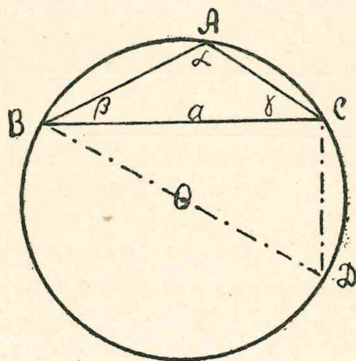
52. **Lyginiai jungiantieji trikampio šonus ir kampus** lengva gauti remianties šiomis teoremomis.

I-ji Teorema: Kiekvienam trikampyje vienas by koks šonas yra lygus apibrėžtojo apie trikampį ratilo diametrui (skersiniui) padaugintam priešais gulinčiojo kampo sinu.

Pažymėję apibrėžtojo ratilo stipiną raide R, išrodykim, jog $a = 2R\sin\alpha$, kame kampas α gali buti smailas arba ir kėstas. Tam tikslui prileiskim pirmiausia, kad kampas α yra smailas (ž. 20 brėž.). Apibrėžtame ratile iš šono **a** galo praveskim ratilo diametrą BD ir sujungkim antrus diametro ir duotojo šono galus tiesiaja CD. Tuomet gausim stattrikampį BDC, kuriame šonas *a* bus katetu, o diametras hipotenuzė. Todel turėsime: $\frac{a}{2R} = \sin BDC$ (18). Bet kampas BDC $= \alpha$, nes remias ta pačia chorda BC kaip ir BAC, todel $\frac{a}{2R} = \sin\alpha$, iškur $a = 2R\sin\alpha$



20 brėž.



21 brėž.

Jei kampas α kėstas, tai padarę tokį pat pagelbinį brėžimą, rasime (ž. 21 brėž.), jog $\frac{a}{2R} = \sin BDC$; bet čia kampas $BDC + \alpha = 180$; todel $BDC = 180 - \alpha$, ir $\sin BDC = \sin(180 - \alpha) = \sin\alpha$; todel kaip ir pirma gauname $\frac{a}{2R} = \sin\alpha$, o iš čia: $a = 2R\sin\alpha$.

Taigi aplamai visada bus:

$$a = 2R\sin\alpha,\ b = 2R\sin\beta,\ c = 2R\sin\gamma \quad . \quad . \quad (96)$$

Iš čia gaunama

II-ji Teorema. Kiekviename trikampyje šonai yra proporcionaliai priešais gulinčiųjų kampų sinams.

Ir ištikrųjų iš (96) lyginių turime:

$$2R = \frac{a}{\sin\alpha},\ 2R = \frac{b}{\sin\beta},\ 2R = \frac{c}{\sin\gamma}$$

iš kur gauname:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

arba

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

53. **Lyginiai jungiantieji stattrikampio elementus.** Pritaikinkim augščiau gautuosius tris pamatinius lyginius stattrikampiui. Tam tikslui prileiskim, kad kampas $\alpha = 90^0$; tuomet β ir γ bus smailieji stattrikampio kampai, a bus hipotenuzė, o b ir c katetu. Kadangi $\sin\alpha = \sin 90^0 = 1$, todel pamatiniai lyginiai įgaus išvaizdą:

$$B + C = 90^0$$

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

iškur

$$b = a\sin\beta \quad . \quad . \quad (99)$$

$$c = a\sin\gamma \quad . \quad . \quad (100)$$

Kadangi $\beta = 90^0 - \gamma$ ir $\gamma = 90^0 - \beta$, todel įstatydami (99) lyginiuosna viet. β ir γ jiems atitinkančius reiškinius, gausime

$$b = a\cos\gamma \quad . \quad . \quad (101)$$

$$c = a\cos\beta \quad . \quad . \quad (102)$$

Iš tų lyginių galime padaryti išvada, jog katetas yra lygus hipotenuzei padaugintai priešais gulinčiojo kampo sinu, arba gretimojo kampo kosinu. Vadinas, priėjom tą patį rezultatą, ką ir augščiau jau buvom gavę iš (18) formulų.

Dalydami lyg. (99) lyginiu (102) ir lyginį (100) lyginiu (101) gausim:

$$\frac{b}{c} = \operatorname{tang}\beta, \quad \frac{c}{b} = \operatorname{tang}\gamma$$

iškur

$$b = c \operatorname{tang}\beta \quad \ldots\ldots \quad (103)$$

$$c = b \operatorname{tang}\gamma \quad \ldots\ldots \quad (104)$$

įstatę čion viet. β ir γ jiems atitinkančius dydžius $90^0 - \gamma$ ir $90^0 - \beta$, rasime:

$$b = c \operatorname{cotg}\gamma \quad \ldots\ldots \quad (105)$$

$$c = b \operatorname{cotg}\beta \quad \ldots\ldots \quad (106)$$

Iš lyginių (103), (106), (104) ir (105) galime padaryt išvada, jog katetas yra lygus antram katetui padaugintam priešais jį galinčiojo kampo tangensu arba gretimojo kampo kotangensu.

Be to iš geometrijos turime dar sąryšį tarp stattrikampio šonų:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

iškur

$$b = a^2 - c^2 = (a + c)\ (a - c); \; c = a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - c) \quad (107)$$

54. **Lyginiai jungiantieji pražulniakampių trikampių elementus.** Taikant betarpiškai pražulniakampiui trikampiui pamatinius lyginius (93), ir (97), dažnai trikampio elementų apskaitymas pasirodo gan painus ir sunkus. Todel randas reikalo surasti patogesnių lyginių. Į tuos lyginius veda šios teoremos:

1. Teorema. Dviejų trikampio šonų suma taip santikiuoja su tų pat šonų liekana, kaip priešais gulinčiųjų kampų pussumės tangensas santikiuoja su tų kampų pusliekanės tangensu.

Iš (97) randame:

$$a + b = 2R\ (\sin\alpha + \sin\beta), \quad a - b = 2R\ (\sin\alpha - \sin\beta),$$

iš čia gi paprastuoju dalymu gauname

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}.$$

Taikindami antrai šio lyginio daliai (75) formulą, gausim naują lyginį:

$$(a+b):(a-b)=\operatorname{tang}\frac{\alpha+\beta}{2}:\operatorname{tang}\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \ldots\ldots \quad (108)$$

kuris ir išreiškia išrodomąją teoremą.

2. **Mohlveidės formulos.** Taip vadinama proporcijos, kuriomis išreiškiama trikampio dviejų šonų sumos bei liekanos santikiavimas su trečiuoju šonu. Tų formulų išvaizda yra ši:

$$a+b:c=\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right):\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$(a-b):c=\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right):\cos\frac{\gamma}{2}$$

Joms išrodyti iš (97) turime:

$a+b=2R(\sin\alpha+\sin\beta)$ ir $c=2R\sin\gamma$, iš čia gauname

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

Bet čia $\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\cos\frac{\gamma}{2}$; todel galutinai randame:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (109)$$

Panašiu budu gauname:

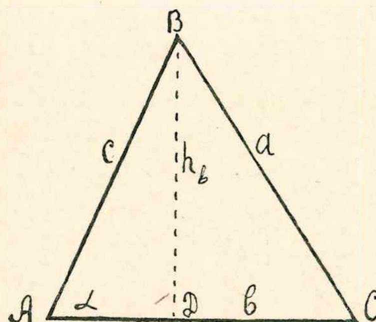
$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\frac{\gamma}{2}} \quad (110)$$

3. **Teorema.** Trikampio šono kvadratas yra lygus kitų dviejų šonų kvadratų sumai be dvigubo judviejų padaugo padauginto tarp jų gulinčiojo kampo kosinu.

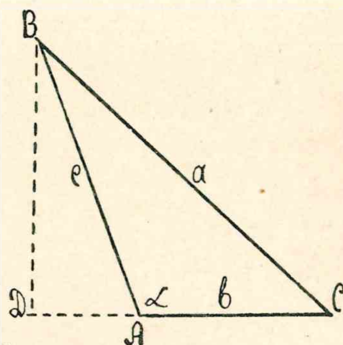
Duotasai trikampis ABC gali buti smailakampis arba kėstakampis. Ištirkim abu žygiu.

1) Teesie kampas α smailas (ž. 22 brėž.). Iš geometrijos žinoma, jog

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \, . \, AD$$



22 brėž.



23 brėž.

Bet iš stattrikampio ABD turime: $AD = c\cos\alpha$, todel:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad . \; . \; . \quad (111)$$

2) Teesie kampas α kėstas (ž. 23 brėž.). Iš geometrijos žinom, jog

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2b \, . \, AD$$

Bet čia $AD = c\cos(180 - \alpha) = -c \, . \cos\alpha$, todel rezultate gauname vėl tą pačią formulą kaip pirma:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

55. Formulos trikampio kampams surasti, turint tris jo šonus.

1) Iš lyginio $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ randame:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

Jei trikampio šonai išreikšti daugiaženkliais skaičiais, tai ši formula apskaitymui nepatogi.

2) Sekantieji iš jos gaunamieji ir logaritmiškiems apskaitymams tinkamieji reiškiniai išvedama šiuo budu:

$$1 - \cos\alpha = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

$$1 + \cos\alpha = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

Bet kadangi $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ (ž 65 ir 66 form.), tatai prileisdami sumą bei perimetrą $a + b + c = 2p$, gausime:

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2(p-c).2(p-b)}{2bc} \qquad 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2p.2(p-a)}{2bc}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \quad (112) \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \quad (113)$$

Šaknįs čia reikia imti visada su pliuso ženklu, nes trikampiuose by kokio kampo pusė yra visada mažesnė neg 90^0, todel $\sin\frac{\alpha}{2}$ ir $\cos\frac{\alpha}{2}$ bus visada teigiamieji dydžiai.

Dalydami pirmą iš tų dviejų reiškinių antruoju, rasime:

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (114)$$

Kampams β ir γ formulos gaunama analogiškai.

Jei tenka apskaitinėti visi trįs kampai, tai formulai (114) galima priduoti dar patogesnė išvaizda, butent daugindami pošakninio reiškinio vardiklį ir skaitiklį reiskiniu $p-a$, gausime

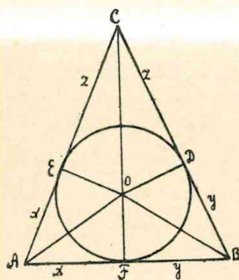
$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (115)$$

Čia pošakninis reiškinis jau yra nebepriklausomas, nuo to, koks kampas apskaitoma. Todel pažymėdami šaknies dydį raide k, turėsime:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{k}{p-a}, \operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = \frac{k}{p-b}, \operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} = \frac{k}{p-c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (116)$$

kame $k = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

56. Formulos kampo pusės tangensui išreikšti pasigaunant trikampio šonų ir įbrėžtojo ratilo stipino. Kampo pusės tangensas trikampyje galima dar apskaityti turint trikampin įbrėžtojo ratilo stipiną.



24 brėž.

Teesie O įbrėžtojo ratilo centras; r stipino ilgis. Savaime aišku, jog linijos OA, OB, OC dalo trikampio kampus pusiau ir jog šonų atrėžai susiduriantieji bendroj viršunėj yra lygųs (pav. AE = AF ir tt.). Sužinokim pirmiausia tų atrėžų dydžius. Pažymėję juos trikampio viršunių eilėje raidemis x, y, z, gausime: $x + y + z = p$; bet $y + z = BC = a$; todel $x = p - a$. Panašiu budu rasim:

$y = p - b$, $z = p - c$. Nun iš stattrikampių, kuriais tapo padalintas trikampis ABC, rasime (ž. 103 ir 104 form.):

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a}, \operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = \frac{r}{p-b}, \operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{p-c}$$

Norint šiomis formulomis naudoties, reikia pirma surasti pats r. Tam tikslui dera geometriškos formulos:

$$P = rp^{1)}, \quad P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\text{iš kur } r = \frac{P}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \quad . \quad . \quad (118)$$

kame P reiškia trikampio plotą.

Sulygindami gautąjį čia stipinui r reiškinį su reiškiniu k praeitame §, matom, jog $r = k$.

57. Formulos apibrėžtojo apie trikampį ratilo stipinui.

1) Iš (96) turime $a = 2R\sin\alpha$, iškur $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$ . . . (118)

2) Imkim pastarąją formulą $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$. Iš kitos šalies iš ly-

---

1) $P = AOB + AOC + BOC = \dfrac{cr}{2} + \dfrac{br}{2} + \dfrac{ar}{2} = r.\dfrac{a+b+c}{2} = r.p.$

ginio $P = \frac{b\,c\sin\alpha}{2}$ randame $\sin\alpha = \frac{2P}{bc}$. Pakeitę šiuo reiškiniu $\sin\alpha$ pirmoje formuloje, gausime $R = \frac{abc}{4P}$ . . . . . . (119)

58. Formulos trikampin įbrėžtojo ratilo stipinui:

1) Iš formulos $P = r.\,p.$, randame $r = \frac{P}{p}$ . . . . (120)

2) Iš 24 brėž. turime $r = x \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$; bet $x = p - a$ (ž. 55 §), todel

$$r = (p - a)\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (121)$$

3) Iš to pat 24 brėž. turime $y = r\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}$, $z = r\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$. Sudėję tuodu reiškinių ir pakeitę reiškinį $y + z$ jam lygiu a, rasime:

$$a = r\left(\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{r\sin\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}} =$$

$$= r\,\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}; \text{iš kur } r = \frac{a\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \quad . \; . \; . \quad 122)$$

Uždaviniai:

Pažymėjus stattrikampio hipotenuzę raide a, katetus raidėmis b ir c o priešais gulinčius kampus, raidėmis α, β, γ išrodyti teisingumas šių formulų:

171. $\sin 2\beta = \frac{2\,b\,c}{a^2}$? 172. $\frac{b^2}{a^2} = \frac{\sin 2\gamma\,.\,\operatorname{tang}\beta}{2}$?

173. $\frac{c^2}{a\,b} = \sec\gamma - \cos\gamma$?

174. $a + b + c = a\sqrt{\sin 2\gamma + 2\sin\gamma + 4\cos^2\frac{\gamma}{2}}$?

175. $\frac{\cos 2\beta - \cos 2\gamma}{\sin 2\gamma} = \operatorname{tang}\gamma - \operatorname{tang}\beta$. 176. $\frac{b + c}{b - c} = \operatorname{tang}2\gamma - \sec 2\beta$.

Pažymėjus pražulniakampio trikampio šonus raidėmis a, b, c, o priešingus jiems kampus raidėmis α, β, γ, išvesti šios formulos:

177. $\operatorname{tang}\alpha = \dfrac{a \sin\gamma}{b - a\cos\gamma}$; $c = a\cos\beta + b\cos\alpha$; $b = a\cos\gamma + c\cos\alpha$; $a = b\cos\gamma + c\cos\beta$.

178. Išrodyti, jog jei trikampio šonai ir kampai atitinka lyginiams $\dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c} = c^2$, $\sin\alpha \sin\beta = \sin^2\gamma$, tai šis trikampis bus tobulas.

179. Išrodyti, jog jei trikampio kampai atitinka lyginiui $\sin\gamma = \dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$, tai šis trikampis bus statkampis.

180. Išrodyti, jog prie sąlygos: $\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\beta + \cos\beta$ trikampis bus statkampis ir lygiašalis.

181. Išrodyti, jog prie sąlygos $\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = \dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sec\alpha + \sec\beta}$ trikampis bus statkampis.



VIII Skirsnys.

Stattrikampių gvaldymas.

59. Pamatiniai stattrikampių gvaldymo uždaviniai. Stattrikampių gvaldymo gali buti keturi pamatiniai žygiai, butent kuomet turima: 1) du katetu, 2) hipotenuzė ir katetas, 3) katetas ir smailas kampas, 4) hipotenuzė ir smalas kampas. Vadinas, aplamai turint du by kokiu stattrikampio elementu (by tik juodu abudu nebutu kampai), visada galima surasti likusieji elementai. Kad geriau supratus, kaip tai atliekama, parodysim čia atskirai, kaip gvaldoma kiekvienas pamatinių žygių.

1 Uždavinys. Duota du katetu b ir c, surasti hipotėnuzė *a* ir abu smailu kampu β ir γ.

Lyginys (103) duoda : $b = c \tang \beta$, iškur

$$\tang\beta = \frac{b}{c}$$

Logaritmuodami randame:

$$\lg \tang \beta = \lg b - \lg c$$

Iš lentelių rasime kampą β; antrą kampą gausime iš formulos:

$$\gamma = 90^0 - \beta$$

Hipotenuzei surasti turime lyginį (99) : $b = a \sin \beta$, iškur

$$a = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$\lg a = \lg b - \lg \sin\beta$$

Jei b ir c išreikšti ne daugiaženkliais skaičiais, tai hipotenuzei apskaityti geriau vartoti formula

$$a = \sqrt{b^2+c^2}$$

Skaitmeninis 1-jo žygio pavyzdys. Teesie

$$b = 45,5, \quad c = 34,2$$

kampo β apskaitymas	hipotenuzės a apskaitymas
$\lg tang\beta = \lg b - \lg c$	$\lg a = \lg b - \lg sin\beta$
$\lg b = 1,65801$	$\lg b = 1,65801$
$\lg c = 1,53403$	$\lg sin\beta = \bar{1},90274$
$\lg tang\beta = 0,12398$	$\lg a = 1,75527$
$\beta = 53^0 4' 9''$	$a = 56,921$

$$\gamma = 90 - \beta = 90 - 53^0 4' 9'' = 36^0 55' 51''$$

2 Uždavinys. Duota hipotenuzė a ir vienas iš katetų b, surasti antrasis katetas c ir abu smailu kampu β ir γ.

Katetas c galima gauti iš formulos

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)}.$$

Kampą β rasime iš (99) lyginio $b = a \sin\beta$, iškur $\sin\beta = \frac{b}{a}$

Antrą kampą rasime iš formulos $\gamma = 90^0 - \beta$.

Jei katetas maž tesiskiria nuo hipotenuzės a, tuomet santikys $\frac{b}{a}$ yra artimas 1-ui, vadinas, kampas β yra artimas 90^0, ir todel tokio kampo apskaitymas bus labai negriežtas; todel šiame atvejyje reikia vartoti kita formula, kurion įeina kampo tangensas.

Tokią formulą mes esam augščiau (67) išvedę, butent $tang\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}}$; o kadangi $\cos\gamma = \frac{b}{a}$, todel įstatydami pošakninin reiškinin $\frac{b}{a}$ viet. $\cos\gamma$, gausime:

$$tang\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

Suradę iš čia $\frac{\gamma}{2}$, rasime ir γ, o kampą β gausime iš form. $\beta = 90^0 - \gamma$.

Skaitmeninis 2-jo žygio pavyzdys. Teesie $a = 78$, $b = 71$

Kateto apskaitymas	kampo β apskaitymas
$\lg c = \frac{\lg(a+b) + \lg(a-b)}{2}$	$\lg \sin\beta = \lg b - \lg a$
$\lg(a+b) = 2,17319$	$\lg b = 1,85126$
$\lg(a-b) = 0,84510$	$\lg a = 1,89209$
$\lg c = \frac{3,01829}{2} = 1,50914$	$\lg \sin\beta = \bar{1},95917$
$c = 32,295$	$\beta = 65^0 32' 30''$

$$\gamma = 90^0 - \beta = 90^0 - 65^0 32' 30'' = 24^0 27' 30''$$

3. **Uždavinys.** Duota vienas iš katetų b ir vienas iš smailių kampų β. Surasti hipotenuzė a, antrasis katetu b ir antrasis kampas γ.

Iš (99) lyginio turime:

$$a = \frac{b}{\sin\beta}$$

Lyginys (105) duos:

$$c = b \operatorname{cotg} \beta$$

Galop $\gamma = 90^0 - \beta$.

Skaitmeninis 3-jo žygio pavyzdys: $b = 2,9$, $\beta = 38^0 21' 30''$

Hipotenuzės apskaitymas	Kateto c apskaitymas
$\lg a = \lg b - \lg \sin\beta$	$\lg c = \lg b + \lg \operatorname{cotg}\beta$
$\lg b = 0,46240$	$\lg b = 0,46240$
$\lg \sin\beta = \bar{1},29280$	$\lg \operatorname{cotg}\beta = 0,10160$
$\lg a = 0,66960$	$\lg c = 0,56400$
$a = 4,673$	$c = 3,6644$

4 **Uždavinys.** Duota hipotenuzė a ir vienas iš smailų kampų. Surasti katetu b ir c ir antrasis smailas kampas γ.

Katetai ir kampas surandama iš formulų:

$$b = a \sin\beta; \quad c = a \cos\beta, \quad \gamma = 90^0 - \beta.$$

Skaitmeninis 4-jo žygio pavyzdys:

$$a = 8,96, \quad \beta = 57^0 42' 36''$$

Kateto b apskaitymas:	Kateto c apskaitymas
$\lg b = \lg a + \lg \sin\beta$	$\lg c = \lg a + \lg\cos\beta$
$\lg a = 0{,}95231$	$\lg a = 0{,}95231$
$\lg\sin\beta = \bar{1}{,}92704$	$\lg\cos\beta = \bar{1}{,}72771$
$\lg b = 0{,}87935$	$\lg c = 0{,}68002$
$b = 7{,}5744$	$c = 4{,}7866$

60. **Gvaldymas lygiašalių trikampių.** Norėdami išgvaldyti lygiašalį trikampį ABA′, praveskim jame augštį BD = h (ž. 25 brėž.); tuomet šis trikampis pasidalys dviem lygiais stattrikampiais ABD ir A′BD.

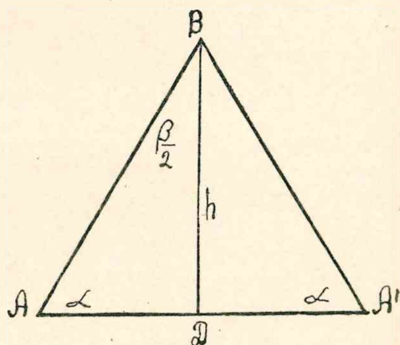
Aišku savaime, jog apskaičius vieno iš tųdviejų stattrikampių elementus, bus lengva apskaityti ir lygiašalio trikampio elementai. Tuo budu lygiašalio trikampio gvaldymas atvedama į stattrikampio gvaldymą.

P a v y z d y s. Surasti lygiašalio trikampio elementai turint jo augštį h ir pamatą b.

Teesie trikampyje ABA′ (ž. 25 brėž) šonas AB = BA′ = a, BD = h, AA′ = b. Tuomet iš stattrikampio ABD turėsime:

$$h = \frac{b}{2} \,.\, \operatorname{tang}\alpha;$$

$$h = a \sin\alpha\,; \quad \frac{\beta}{2} = 90 - \alpha$$



25 brėž.

iškur randame:

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{2\,h}{b}\,; \; a = \frac{h}{\sin\alpha}\,; \; B = 180^0 - 2\alpha$$

61. **Gvaldymas pražulniakampių trikampių.** Pražulniakampių trikampių gvaldymo pamatiniai žygiai yra irgi keturi, butent kuomet turima: 1) trįs šonai, 2) du šonu ir kampas tarp jų, 3) šonas ir du kampu ir 4) du šonu ir kampas gulįs priešais kurį nors iš judviejų. Kaip tai atliekama, pažinsime geriau gvaldydami kiekvieną iš tų keturių pamatinių žygių atskirai.

1 Uždavinys. Turima trįs šonai a, b, c, surasti kampai α, β, γ. Naudodamies lyginiais (114), gauname:

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}};\quad \operatorname{tang}\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-\beta)}};$$

$$\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-'b)}{p(p-c)}}$$

iškur apskaitome kampų puses, o paskui ir pilnus kampus.

Skaitmeninis pavyzdys: $a=35$, $b=39$, $c=48$.

Prirengiamasis apskaitymas:

$2p = 35+39+48 = 122$

$p = 61, \quad \lg p = 1{,}78533$

$p-a = 26, \ \lg(p-a) = 1{,}41497$

$p-b = 22, \ \lg(p-b) = 1{,}34242$

$p-c = 13, \ \lg(p-c) = 1{,}11394$

Kampo α apskaitymas:

$\lg(p-b) = 1{,}34242$

$\lg(p-c) = 1{,}11394$

$\operatorname{palg} p = 8{,}21467-10$

$\operatorname{palg}(p-a) = 8{,}58503-10$

$2\lg\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = 19{,}25606-20$

$\lg\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = 9{,}62803-10$

$\frac{\alpha}{2} = 23^0 0' 31''$, $\alpha = 46^0 1' 2''$

Apkaitymas kampo β

$\lg(p-a) = 1{,}41497$

$\lg(p-c) = 1{,}11394$

$\operatorname{palg} p = 8{,}21467-10$

$\operatorname{palg}(p-b) = 8{,}65758-10$

$2\log\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = 19{,}40116-20$

$\log\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = 9{,}70058-10$

$\frac{\beta}{2} = 26^0 39'$, $\beta = 53^0 18'$.

Apskaitymas kampo γ

$\lg(p-a) = 1{,}41497$

$\lg(p-b) = 1{,}34242$

$\operatorname{palg} p = 8{,}21467-10$

$\operatorname{palg}(p-c) = 8{,}88606-10$

$2\lg\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} = 19{,}85812-20$

$\lg\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} = 9{,}92906-10$

$\frac{\gamma}{2} = 40^0 20' 28''$, $\gamma = 80^0 40{,}56''$.

Patikrinimas.

$\alpha+\beta+\gamma = 46^0 1' 2'' + 53^0 18' + 80^0 40' 56'' = 179^0 59' 58''$.

Vadinas padaryta 2″ klaida; ji yr atsiradus delei lentelių negriežtumo.

Kampų apskaitymui galima naudoties ir puskampių sino bei kosino formulomis (112), (113), bet tangenso formulos yra patogesnes, nes 1) kampams apskaityti tangenso formulomis užtenka keturių logaritmų, tuotarpu apskaitant kampus sino bei kosino formulomis be tų keturių logaritmų reikia dar surieškoti dydžių a, b, c logaritmai; 2) kampai tangensais apskaitoma griežčiau, negu sinais bei kosinais.

2 Uždavinys. Duota šonai a, b ir kampas γ tarp jų, apskaityti kampai α, β ir šonas c.

Iš formulos (108) turime

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tang}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Kadangi $\alpha+\beta=180^0-\gamma$, todel $\operatorname{tang}\frac{\alpha+\beta}{2}=\operatorname{tang}\left(90^0-\frac{\gamma}{2}\right)$ $=\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$, todel

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\text{iškur } \operatorname{tang}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{(a-b)}{a+b}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$$

Iš čia surasime $\alpha-\beta$. Prileidę jog $\frac{\alpha+\beta}{2}=\varphi$, o $\frac{\alpha-\beta}{2}=\psi$, rasime, jog $\alpha=\varphi+\psi$, o $\beta=\varphi-\psi$.

Šoną c rasime iš santikiavimo $\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{a}{\sin\alpha}$; $c=\frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$

Jis galima rasti taipgi ir iš formulos (111).

Skaitmeninis pavyzdys:

$$a=12{,}6,\ b=9{,}9,\ \gamma=62^0 17' 48''$$

Apskaitymas kampo $\frac{\alpha+\beta}{2}$:

$$\frac{\gamma}{2} = 31^0 8' 54''$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^0 - 31^0 8' 54'' = 58^0 51' 6''$$

$$a + b = 22{,}5$$

$$a - b = 2{,}7$$

Apskaitymas kampo $\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$\lg(a - b) = 0{,}43136$$

$$\lg\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = 0{,}21868$$

$$\text{palog}\,(a + b) = 8{,}64782 - 10$$

$$\lg\operatorname{tang}\frac{\alpha-\beta}{2} = 9{,}29786 - 10$$

$$\frac{\alpha-\beta}{2} = 11^0 13' 47''$$

Apskaitymas kampų α ir β.

$$\alpha = 58^0 51' 6'' + 11^0 13' 47'' = 70^0 4' 53''$$

$$\beta = 58^0 51' 6'' - 11^0 13' 47'' = 47^0 37' 19''$$

Apskaitymas šono c.

$$\lg c = \lg a + \lg\sin\gamma + \text{palog}\sin\alpha$$

$$\lg a = 1{,}10037$$

$$\lg\sin\gamma = \bar{1}{,}94713$$

$$\text{palog}\sin\alpha = 0{,}02679$$

$$\lg c = 1{,}07429$$

$$c = 11{,}866$$

3 Uždavinys. Duota šonas a ir du kampu β ir γ, apskaityti kampas α ir kitu du šonu b ir c.

Kampą α randame iš formulos

$$\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)$$

Ieškomieji šonai randama iš santikiavimų:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} \text{ ir } \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

iš kur

$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}, \quad c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

Skaitmeninis pavyzdys:

$$a = 2637, \ \beta = 52^0 12' 30'', \ \gamma = 59^0 49' 10''.$$

Apskaitymas kampo α.

$$\beta + \gamma = 52^0 12' 30'' + 59^0 49' 10'' = 112^0 1' 40''$$
$$\alpha = 180^0 - 112^0 1' 40'' = 67^0 58' 20''$$

Apskaitymas šono b.

$$\lg b = \lg a + \lg \sin \beta + \mathrm{palg} \sin \alpha$$
$$\lg a = 3{,}42111$$
$$\lg \sin \beta = 9{,}89776 \quad - 10$$
$$\mathrm{palg} \sin \alpha = 0{,}03292$$
$$\lg b = 3{,}35179$$
$$b = 2247{,}9$$

Apskaitymas šono c.

$$\lg c = \lg a + \lg \sin \gamma + \mathrm{palg} \sin \alpha$$
$$\lg a = 3{,}42111$$
$$\lg \sin \gamma = 9{,}93674 \quad - 10$$
$$\mathrm{palg} \sin \alpha = 0{,}03292$$
$$\lg c = 3{,}39077$$
$$c = 2459{,}1$$

4 Uždavinys. Duota du šonu a ir b ir kampas α gulįs priešais vieno iš jųdviejų. Surasti kampai β ir γ ir šonas c.

Kampui β surasti naudojamės santikiavimu $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \pi}$, iškur gauname
$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$$

Suradę iš čia kampą β, antrą γ rasime iš formulos
$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$$

Šoną c rasime iš santikiavimų $\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha}$, iškur
$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

Kadangi kampas β gaunama čia sino funkcijoje, ir kadangi dviejų kampų β ir $180^0 - \beta$ sinai yra lygus, todel šiame ketvirtame uždavinyje, tikrai sakant, galima surasti ne vienas, bet du kampu atitinkančių uždavinio sąlygoms. Pažiurėkim nun, kuomet tai gali atsitikti.

Prileiskim pirmiausia, kad $a > b$. Tuomet kampas β bus mažesnis neg α.

Vadinas, ar čia α bus smailas ar kėstas, kampas β bus visada smailas, nes dviejų kėstų kampų trikampyje negal buti. Delei tos priežasties antroji kampo β reikšmė $180^0 - \beta$ šiame atvejyje reikia atmesti, nes kampas $180^0 - \beta$ visada bus kėstas. Tuo budu uždavinys šiame atvejyje teturės tik vieną išgvaldymą.

Jei a = b, tai ir $\beta = \alpha$, vadinas abu kampu bus smailu ir todel antroji reikšmė β, kaipo duodanti kėstą kampą čia bus netinkanti.

Bet jei $a < b$, tai $\beta > \alpha$, vadinas, čia kampas α gali buti tiktai smailas, o β gali buti ir smailas ir kėstas, taigi šiame atvejyje abi kampo β reikšmi atitinka uždavinio sąlygoms ir duoda du tikru išgvaldymu.

Jei kampas β gali turėti dvi reikšmi β ir $\beta_1 = 180^0 - \beta$ tuomet ir kampas γ ir šonas c turės taipgi po dvi reikšmi, taigi be γ ir c turės dar

$$\gamma_1 = 180^0 - (\alpha + \beta_1),\ c_1 = \frac{a \sin \gamma_1}{\sin \alpha}$$

Skaitmeninis pavyzdys: $a = 4{,}4$, $b = 5{,}8$, $\alpha = 33^0 48'$.

Pirmasis išgvaldymas.

Apskaitymas kampo β.	Apskaitymas kampo γ
$\lg \sin \beta = \lg b + \lg \sin \alpha + \mathrm{pa} \lg a$	$\alpha + \beta = 33^0 48' + 47^0 9' 55'' = 80^0 57' 55''$
$\lg b = 0{,}76343$	$\gamma = 180 - 80^0 57' 55'' = 99^0 2' 5''$
$\lg \sin \alpha = 9{,}74531 - 10$	
$\mathrm{palog}\, a = 9{,}35655 - 10$	
$\lg \sin \beta = 9{,}86529 - 10;$	
$\beta = 47^0 9' 55''$	

Apskaitymas šono c.

$$\lg c = \lg a + \lg \sin \gamma + \mathrm{pa} \sin \alpha$$
$$\lg a = 0{,}64345$$
$$\lg \sin \gamma = 9{,}99458 - 10$$
$$\mathrm{palog} \sin \alpha = 0{,}25469$$
$$\lg c = 0{,}89272;\ c = 7{,}8112$$

Antrasis išgvaldymas.

Apskaitymas kampo β_1

$$\beta_1 = 180^0 - 47^0 9' 55'' = 132^0 50' 5''$$

Apskaitymas kampo γ_1

$$\alpha + \beta_1 = 33^0 48' + 132^0 50' 5'' - 166^0 38' 5''$$
$$\gamma_1 = 180^0 - 166^0 38' 5'' = 13^0 21' 55''$$

Apskaitymas šono c_1:

$$\lg c_1 = \lg a + \lg \sin \gamma_1 + \operatorname{palg} \sin \alpha$$

$$\lg a = 0{,}64345$$

$$\lg \sin \gamma_1 = 9{,}36391 - 10$$

$$\operatorname{palg} \sin \alpha = 0{,}25469$$

$$\lg c_1 = 0{,}26205; \; c_1 = 1{,}8283.$$

IX Skirsnys.

Formulos trikampio plotui apskaityti.

62. Augščiau jau mes buvom išrodę, jog turint du trikampio šonu b ir c ir kampą α tarp jų, gaunamoji trikampio plotui apskaityti formula yra ši:

$$P = \frac{bc \sin \alpha}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (123)$$

tai reiškia, jog bykokio trikampio plotas yra lygus dviejų šonų padaugo pusei, padaugintai gulinčiojo taip jų kampo sinu.

Prileidę trikampio ploto formuloj kampą $\alpha = 90$, gausime

iš jos, jog $P = \frac{bc}{2}$ . . . . (124)

tai reiškia, jog by kokio stattrikampio plotas yra lygus katetų padaugo pusei.

63. **Apskaitymas stattrikampio ploto.** Tasai apskaitymas paaiškės begvaldant pamatinius uždavinius. Jų yra keturi.

1. Uždavinys. Turint du katetu, surasti statrikampio plotas.

Iš ką tik gautos formulos randam, jog šiame atvejyje $P = \frac{bc}{2}$.

2. Uždavinys. Turint hypotenuzę a ir vieną iš katetų b, surasti stattrikampio plotas.

Įstatę formulon (124) $\sqrt{a^2 - b^2}$ vieta c rasim:

$$P = \frac{b \,.\, \sqrt{(a+b)\,(a-b)}}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (125)$$

3. Uždavinys. Turint katetų b ir vieną iš smailų kampų β, surasti stattrikampio plotas.

Įstatę (124) formulon viet. c reiškinį gautąjį iš lyginio $c = b \operatorname{cotg} \beta$, rasime

$$P = \frac{b^2 \operatorname{cotg} \beta}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (126)$$

4. Uždavinys. Turint hipotenuzę a ir vieną iš smailų kampų, β surasti statrikampio plotas.

Įstatę (124) formulon katetų vieton reiškinius gautuosius iš lyginių $b = a \sin\beta$, $c = a\cos\beta$, rasime

$$P = \frac{a^2 \sin\beta \cos\beta}{2} = \frac{a^2 \sin 2\beta}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (127)$$

64. Apskaitymas pražulnaus trikampio ploto. Tasai apskaitymas paaiškės begvaldant pamatinius uždavinius. Jų yra irgi keturi.

1 Uždavinys. Turint trikampio tris šonus a, b, c, surasti jo plotas.

Formuloj (123) $\sin\alpha$ pakeiskim jam lygiu reiškiniu $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ tuomet turėsim

$$P = bc \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2}$$

Įšreiškę $\sin\frac{\alpha}{2}$ ir $\cos\frac{\alpha}{2}$ formulomis (112) ir (113) rasime:

$$P = bc\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{p\,(p-a)}{bc}} = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

Šį formula jau žinoma mums iš elementarės geometrijos.

2 Uždavinys. Turint du šonu b ir c ir kampą tarp jų α, surasti trikampio plotas.

Plotas gaunama tiesiog iš formulos $P = \frac{bc\sin\alpha}{2}$

3 Uždavinys. Turint šoną a ir du kampu β ir γ, surasti trikampio plotas.

Iš santikiavimų $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ randame

$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha},\ c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Įstatę tuodu reiškiniu formulon (123) gausime

$$P = \frac{a^2 \sin\beta \,.\, \sin\gamma}{\sin\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (128)$$

O kadangi trikampyje:

$$\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma),\ \text{todel}\ \sin\alpha = \sin(\beta + \gamma).$$

Įstatę šį reiškinį viet. $\sin\alpha$ (128) formulon galime jai dar priduoti išvaizdą:

$$P = \frac{a^2 \sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)} \quad \ldots\ldots \quad (128')$$

4. Uždavinys. Turint du šonu b, c ir kampą β, surasti trikampio plotas.

Kadangi kampas $\alpha = 180^0 - (\beta+\gamma)$, tai $\sin\alpha = \sin(\beta+\gamma)$ Todel (123) formula šiam atvejyje įgauna išvaizdą:

$$P = \frac{bc \sin(\beta+\gamma)}{2} \quad \ldots\ldots \quad (129)$$

kame kampas γ reikia apskaityti pirma, pasigaunant santikiavimą $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$, iškur rasime:

$$\sin\gamma = \frac{c \sin\beta}{b}$$

Prie $b < c$ gausime antrą išgvaldymą (plg. 61 §, 4 uždavinį)

$$P_1 = \frac{bc \sin(\beta+\gamma_1)}{2}$$

kame kampas γ_1 reikia pirma surasti iš formulos $\gamma_1 = 180 - \gamma$.



X Skirsnys.

Ypatingi trikampių gvaldymo uždaviniai.

65. Be pamatinių trikampių gvaldymo uždavinių esama dar ir kitokių kuriuosna įeina trikampio elementų santikiavimai arba kitoki elementai, kaip šit augščiai, medianos[1]), kampai tarp jų ir tt. Žinant pamatinių uždavinių gvaldymą, pigu išgvaldyti ir ypatingieji uždaviniai. Kaip tai daroma, paaiškės iš žemiau dedamųjų pavyzdžių.

1 Pavyzdys. Išgvaldyti trikampis turint vieną jo smailą kampą β ir hipotenuzės su katetu sumą $a + c = s$.

Žinodami, jog $c = a \cos \beta$, turime

$$a + c = a + a \cos \beta = s, \text{ iškur } a = \frac{s}{1 + \cos \beta} = \frac{s}{2 \cos^2 \frac{\beta}{2}}$$

Katetams surasti turim lyginius:

$$b = a \sin \beta = \frac{s \sin \beta}{2 \cos^2 \frac{\beta}{2}} = \frac{2 s \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\beta}{2}} = s \operatorname{tang} \frac{\beta}{2}$$

$$c = a \cos \beta = \frac{s \cos \beta}{2 \cos^2 \frac{\beta}{2}}$$

2 Uždavinys. Išgvaldyti trikampis turint kampą α, priešais jį gulintį šoną a ir dviejų kitų šonų sumą $b + c = s$.

---

[1]) Linijos dalančios trikampio kampus pusiau.

Naudodamies pamatiniais santikiavimais $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ gauname:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b+c}{\sin\beta + \sin\gamma}; \text{ iškur } \sin\beta + \sin\gamma = \frac{s.\sin\alpha}{a}$$

Bet $\sin\beta + \sin\gamma = 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$ (ž. 71 form.), todel

$$2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{s.\sin\alpha}{a}, \text{ iškur}$$

$$\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{s\,.\,\sin\alpha}{2\,a\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{s\,.\,\sin\frac{\alpha}{2}}{a}$$

Suradę iš čia kampų pusliekanę $\frac{\beta-\gamma}{2}$ ir žinodami, jog jų pussumė $\frac{\beta+\gamma}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2}$, lengvai surasime ir pačius kampus β ir γ.

Ješkomieji šonai b ir c bus galima surasti iš lyginių

$$b + c = s;\; b - c = \frac{s\,.\,\mathrm{tang}\,\frac{\beta-\gamma}{2}}{\mathrm{cotg}\,\frac{\alpha}{2}} = k\,^{1)}$$

kuriuodu dėstydami ir imstydami gausime

$$b = \frac{s+k}{2},\; c = \frac{s-k}{2}$$

3 Uždavinys. Išgvaldyti trikampis turint šoną a, nuleistąjį į jį perpendikulerą bei augštį h ir apibrėžtojo apie trikampį ratilo stipiną R.

Iš lyginio $a = 2\,R\sin\alpha$, gaunam $\sin\alpha = \frac{a}{2\,R}$; iš čia surandam kampą α.

Šonui b ir kampui β surasim kitu du lyginiu: $b = 2\,R\sin\beta$ ir $h = b\sin\beta$. Prašalindami iš jų dviejų $\sin\beta$, randame $b = 2\,R\,.\,\frac{h}{b}$, iškur $b = \sqrt{2\,R\,h}$. Prašalindami gi iš tų

---

1) Žiur. (108) form.

pačių lyginių b, gauname $\frac{h}{\sin \beta} = 2\,R \sin \beta$, iškur $\sin \beta = \sqrt{\frac{h}{2\,R}}$

Turėdami kampus α ir β trečiąjį γ randame iš formulos $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$, o turėdami kampą γ randame ir šoną c iš lyginių $c = 2\,R \sin \gamma$, arba $h = c \sin \gamma$.

Iš paduotųjų augščiau pavyzdžių matom, jog bendras panašių uždavinių gvaldymo budas yra tas, kad, pasigaunant tam tikrų formulų, prašalinus įeinančiuosius duotuosna santikiavimuosna nežinomus dydžius ir suradus santikiavimus rišančius duotuosius dydžius su trikampio kampais bei šonais.

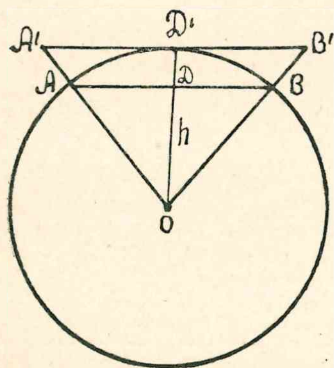


XI Skirsnys.

Tobulų daugiakampių gvaldymas ir segmento ploto apskaitymas.

66. Kiekvienas tobulas daugiakampis galima išskaidyti tam tikru lygių trikampių skaičium. Taigi daugiakampių gvaldymas pareina nuo trikampių gvaldymo. Geriau tam dalykui suprasti teesie keletas pavyzdžių.

1 Uždavinys. Apskaityti tobulo ratilan įbrėžtojo n-kampio šonas, turint ratilo stipiną r.



26 brėž.

Pažymėję n-kampio šoną AB raide a ir nuleidę iš centro O perpendikulerą OD į AB turėsime:

$$AD = AO \sin AOD.$$

Bet $AD = \frac{a}{2}$; kampas AOD yra lygus kampo AOB pusei. Taigi turėsime

$$\text{kampas } AOD = \frac{AOB}{2} = \frac{360^0}{2n} = \frac{180^0}{n}$$

kame n reiškia daugiakampio šonų skaičių. Taigi augščiau rastasis lyginys, padarius jame pakeitimus, įgaus išvaizdą:

$$\frac{a}{2} = r \sin \frac{180^0}{n}; \text{ iškur } a = 2r \sin \frac{180^0}{n} \quad \ldots\ldots \quad (130)$$

Turint tobulo n-kampio šoną randame ir jo perimetrą $p = na$, ir jo plotą $P = \frac{nah}{2} = \frac{nar}{2} \cos \frac{180^0}{n} = \frac{nr^2}{2} \sin \frac{360^0}{n}$ (131)

2 Uždavinys. Apskaityt tobulo apibrėžtojo n-kampio šonas, turint ratilo stipiną r.

Pažymėję apibrėžtojo tobulo daugiampio šoną A'B' raide b ir sujungę palietimo punktą D', su centru O tiesiaja OD', iš stattrikampio A'OD' gausime:

$$A'D' = OD', \text{tang } A'OD' \text{ arba } \frac{b}{2} = r\text{tang}\frac{180^0}{n}$$

$$\text{iškur } b = 2\,r\,\text{tang}\,\frac{180^0}{n} \quad \ldots\ldots \quad (132)$$

To daugiakampio perimetras $p_1 = bn$; plotas

$$P_1 = \frac{n\,b\,r}{2} = \frac{n\,b^2}{4}\cot g\,\frac{180^0}{n} = nr^2\text{tang}\,\frac{180^0}{n} \quad \ldots\ldots \quad (133)$$

3 Uždavinys. Turint ratilo stipiną r ir lanką α^0, apskaityti segmento plotas.

Iš 26 brėž. aišku, jog segmento AD'B plotas yra lygus sektoro OAD'B plotui be trikampio AOB ploto. Bet sektoro plotas, kaip žinom iš geometrijos yra lygus $\frac{\pi r^2 \alpha^0}{360^0}$, o trikampio

$$AOB \text{ plotas} = \frac{AO\,.\,OB \sin AOB}{2} = \frac{r^2 \sin \alpha^0}{2}$$

Taigi pažymėję segmento plotą raide P, rasime:

$$P = \frac{\pi r^2 \alpha^0}{360} - \frac{r^2 \sin \alpha}{2} = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi \alpha^0}{180^0} - \sin \alpha^0\right) \quad \ldots\ldots \quad (134)$$

Jei segmento lankas be gradų turi dar minučių bei sekundų, tai lanko gradų skaičių ir 180^0 reikia išreikšti minutėmis bei sekundomis.

Uždaviniai.

Pastaba. Uždaviniuose nuo 183 lig 194 *a* reiškia hipotenuze, *b* ir *c* katetus, β ir γ gulinčiuosius prieš *b* ir *c* smailuosius kampus.

Išgvaldyti stattrikampiai šiomis sąlygomis!

183. $b = 94{,}638$, $c = 536{,}72$?
184. $a = 30{,}69$, $b = 24{,}67$?
185. $a = 627$, $\beta = 23^0 30'$?
186. $a = 8{,}96$, $\gamma = 57^0 41' 36''$?
187. $a = 9{,}35$, $c = 8{,}49$?
188. $b = 45{,}5$, $\gamma = 33^0 30'$?
189. $b = 2{,}894$, $\beta = 38^0 21' 30''$?
190. $b = 0{,}234786$, $\beta = 23^0 48''$?
191. $a = 2{,}777.$, $\beta = 38^0 17' 27''$?
192. $b = {}^2/_8$, $\beta = 38^0 18'$?
193. $b = {}^3/_7$, $c = {}^5/_{11}$?
194. $a = 1$, $\gamma = 36^0$?

Išgvaldyti lygiašaliai trikampiai, kuriuose *b* reiškia pamatą, *a* kiekvieną iš lygių šonų, *h* augštį?

195. $b = 0{,}62786$, $\beta = 47^0 48' 50''$?
196. $a = 7{,}71$, $\beta = 110^0 48' 48''$?
197. $h = 6{,}6$, $a = 6{,}71$?
198. $h = 16{,}8$, $\beta = 17^0 35' 40''$?

Išgvaldyti stattrikampiai šiomis sąlygomis:

199. $b + c = 405$, $\gamma = 32^0 10'$?
200. $a + b = 14{,}121$, $\gamma = 36^0 15' 28''$?
201. $a = 45$, $b + c = 68$?
202. $b - c = 22{,}622$, $\gamma = 18^0 45' 40''$?
203. $b + c = m$|; $bc + b^2 - c^2$?
204. $b - c = a - b$?
205. $a + b = 2c$?
206. $a + b + c = 132$; $a^2 + b^2 + c^2 = 6050$?
207. Rombo perimetras = 842,7, viena iš jo diagonalių = 92,355. Surasti jo kampai?
208. Ratilo stipinas $= r$; surasti ilgis chordos, sudarančios lanką b^0?
209. Koks yra ilgis chordos, atitinkančios lankui, kurio ilgis lygus stipinui?
210. Iš punkto ratlanky, kurio stipinas $r = 5$ pravesta dvi chordi $a = 2{,}868$ ir $b = 7{,}098$, surasti kampas tarp jų?
211. Akrobatas nori virve užeiti nuo žemės į bokštą turintį 10,5 metrų augštį; eiti virve augštyn tegalima tik tuomet, jei virvė yra į horizontą palinkusi kampu nedidesniu per 30^0. Virvės ilgis yra = 19,6 metr. Ar gali akrobatas užeiti virve į šį bokštą?
212. Iš saulės centro žemės stipinas matoma kampu $8''{,}6$; surasti saulės tolį nuo žemės?
213. Matomasis saulės diametras (skersinis) = $32'$. Surasti saulės dydis, žinant, jog jos tolumas nuo žemės siekia 24000 žemės stipinų?
214. Bokštas 27 metrų augštas matoma iš laivo kampu $4^0 14' 30''$. Surasti laivo tolis nuo bokšto?
215. Stattrikampio plotas yra lygus plotui ratilo, kurio stipinas yra lygus kateto b pusei. Surasti stattrikampio kampai.

Išgliaudyti trikampiai šiomis sąlygomis:

216. $a = 4{,}4$, $b = 5{,}8$, $\alpha = 33^0 48'$.
217. $a = 45^3/_4$, $\alpha = 43^0 18'$, $\beta = 75^0 42'$?
218. $a = 12{,}85$, $b = 7{,}969$, $\gamma = 92^0 5'$?

219. $a = 400$, $\alpha = 36^0 40'$, $\beta = 79^0 50'$?

220. $b = 12$, $\alpha = 35^0$, $\beta = 107^0 25'$?

221. $b = 96{,}8$; $c = 56{,}5$; $\alpha = 37^0 25' 30''$?

222. $a = 3$; $b = 4$; $c = 5$?

223. $a + b = 60{,}584$, $\alpha = 60^0$, $\beta = 43^0$?

224. $b = 866{,}025$, $\beta = 60^0$; $(a + c) : (a - c) = 3$?

225. $a + b + c = 128{,}45$; $\alpha = 40^0$, $\beta = 38^0$?

226. $a = 73{,}65$; $\beta = 34^0 18'$; $b + c = 69{,}4$?

227. Trįs ratilai laukutinai paliečia kits kitą; jų stipinai yra 0,82888; 0,86616; 0,8988. Surasti kampai sudaromieji centrų linijomis?

228. Žaibas tiesiosios linijos pavidale buvo matytas žemėje kampu $43^0 36' 10''$; praslinkus 17 minučių pasigirdo griaustinis, kurs besitęsė $2^1/_3$ sekundos. Surasti žaibo ilgis, žinant, jog balsas sekundoje nueina 333 metrų?

229. Norint sužinot priešų stovyklos A tolis nuo tvirtovės B, išmatuota tiesioji $BC = 322{,}55$ sieksnių ir kampai $ABC = 60^0 34'$ ir $ACB = 56^0 10'$. Surasti tiesiosios AB ilgis?

230. Dviejuose punktuose A ir B stovintieji žiurovai mato lėktuvą kampais α^0 ir β^0. Linijos AB ilgis $= a$. Surasti, kaip augštai lėktuvas yr pavilęs nuo žėmėj.

231. Žiurint nuo kalno, kurio augštis $= h$ į debesį, surasta, jog jis matos kampu m^0 horizontalio plokščio žvilgsniu; žiurint gi į atmuštą ežero paviršyje to pat debesio vaizdą, rasta, jog jis matos kampu n^0. Surasti, kaip augštai debesys ore plauko?

232. Surasti trikampio šonų santikiavimas, jei jo kampai santikiuoja kaip $1:2:3$? $3:4:5$? $4:5:6$?

233. Išrodyti jog trikampio plotas P galima išreikšti šomis lygybėmis:

$$a)\ P = \frac{a^2 \sin 2\beta + b^2 \sin 2\alpha}{4}; \quad b)\ P = \frac{2\,a\,b\,c}{a+b+c} \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}?$$

234. Pažymėjus trikampio plotą P, perimetrą 2p parodyti, jog:

$$\sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{P^2}{p\,abc}; \quad \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{P\,p}{abc};$$

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tang}\frac{\beta}{2} \operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} = \frac{P}{p^2}$$

235. Surasti trikampio plotas, turint jo augštį h ir du kampu?
236. Surasti ratilan įbrėžtojo 40-kampio šonas ir plotas, žinant jog ratilo stipinas yra lygus 5,16 metro?
237. Surasti tobulo 5-kampio diagonalę, jei jo šonas = $^1/_2$ metro?
238. Tobulo ratilan įbrėžtojo 5-kampio plotas = 3,3184, surasti tobulo tan pačian ratilan įbrėžtojo 20-kampio plotas?
239. Kvadratan, kurio plotas = 316,24 įbrėžta tobulas trikampis, kurio vienas šonas yra lygus kvadrato šonui. Surasti to trikampio plotas.

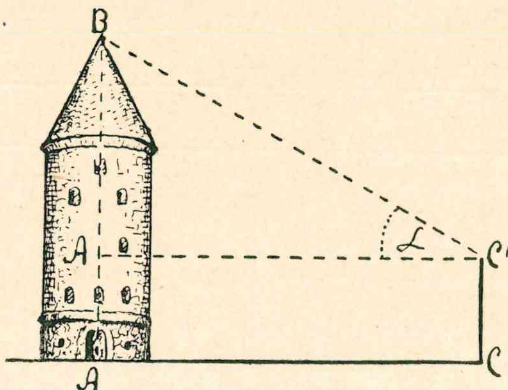
XII Skirsnys.

Tiesialinijinės trigonometrijos pritaikymas žemės matavimui.

67. Pasigaunant trigonometrijos, galima gvaldyti kaikurie uždaviniai turintieji praktikos reikšmės, pav. suradinėti neprieinamųjų žemės paviršiaus punktų atstogumai, matuoti neprieinamųjų daiktų augščiai ir tt. Tam tikslui paprastai užtenka matavimo retežių išmatuoti žemės paviršiuje tam tikra tiesioji, vadinama baze, o taipgi ir kaikurie kampai horizontaliuose bei vertikaliuose plokščiuose.

Kampams matuoti tokiuose atsitikimuose vartojama papaprastai įvairųs prietaisai: astrolabija, teodolitas, mensula, kertainis ir k. Paprasčiausias prietaisas, tai astrolabija, kuria kampai galima išmatuoti artutinai lig 5′.

1 Uždavinys. Surasti augštis prieinamo daikto, stovinčio horizontaliame plokštyje.



27 brėž.

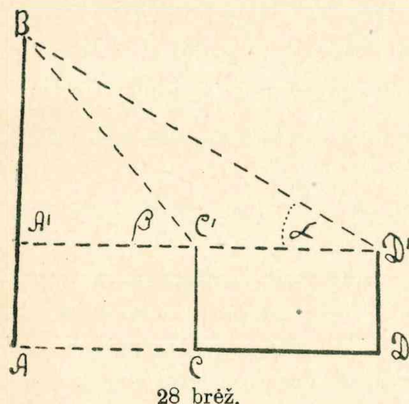
Reikia, sakysime, išmatuoti daikto AB augštis (ž. 27 brėž.). Tam tikslui, išmatavę retežiu bazę AC = b, statome punkte C astrolabiją ar teodolitą ir matuojame kampą $A'C'B = \alpha$. Turint a ir b, tai yra kampą ir katetą, galima iš stattrikampio A'C'B surasti ir A'B dydis, nes $A'B = A'C' \tang\alpha = b \tang\alpha$.

Pridėję prie A'B dar instrumento augštį CC' surasime ješkomąjį AB augštį.

2 Uždavinys. Surasti neprieinamojo daikto augštis.

1-s žygis. Horizontalės bazės prailginimas eina per matuotinojo daikto pamatą (ž. 28 brėž.).

Prileiskim, kelyje daikto AB linkon pasilaiko kliutis, pav. upė bei ežeras. Tuomet renkamasi toki horizontalė bazė CD = b, kad ji budama prailginta eitu per daikto AB pamatą A. Išmatavę bazę ir nustatę jos galuose matuojamąjį instrumentą, matuojame juo kampus α ir β. Tuomet trikampyje C'D'B bus žinomas šonas C'D' = b ir du gretimu kampu α ir 180 — β. Todelei turėsime:



28 brėž.

$$\frac{BC'}{C'D'} = \frac{\sin BD'C'}{\sin C'BD'}, \text{ iškur}$$

$$BC' = \frac{b \sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$$

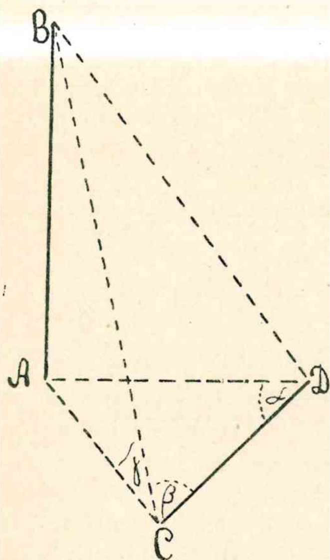
Iš stattrikampio gi A'BC' rasime $A'B = BC' \sin\beta$, taigi įstatydami čion viet. BC' augščiau gautąjį reiškinį, rasime:

$$A'B = \frac{b \sin\alpha \,.\, \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}$$

2-s žygis. Horizontalės bazės prailginimas neina per matuojamojo daikto pamatą.

Prileiskim, kad vietos ypatybės neleidžia išsirinkti bazės, kurios prailginimas eitu per tuo daikto pamatą. Tuomet renkamasi bazė CD = b, koki galima (29 brėž.), kuri tečiaus gulėtu tame

pat plokštyje kaip ir daikto pamatas A. Tai padarius matuojama kampai ADC = α, ACD = β ir ACB = γ.



29 brėž.

Iš trikampio ACD randame:

$$AC = \frac{b \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Iš stattrikampio gi ABC turime:

$$AB = AC \tang \gamma$$

Todel galutinai randame

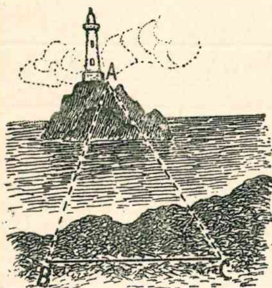
$$AB = \frac{b \sin \alpha \tang \gamma}{\sin(\alpha + \beta)}$$

3-s **žygis**. Bazė guli nehorizontaliame plokštyje.

Jei bazė CD guli nehorizontotaliame plokštyje, tai reikia išmatuoti kampai BCD ir BDC. Iš trikampio BCD apskaitom šoną BC, o iš pražulniakampio trikampio ABC, turėdami šonus BC ir AC (apskaitytą iš trikampio ACD augščiau nurodytu budu), o taip gi kampą ACB = γ, rasime ir AB.

3 Uždavinys. Surasti dviejų punktų atstogumas, kuris tiesioginiai išmatuoti negalima.

1-s **žygis**. Vienas punktų yra prieinamas, antras ne.



30 brėž.

Reikia, sakysime, išmatuoti atstogumas tarp dviejų punktų A ir B (ž. 30 brėž.), kuriuodu abudu yra matomu, bet vienas iš jų A yra neprieinamas. Tam tikslui matuojame bazę BC = b ir gretimus kampus ABC = α ir ACB = β. Tuomet iš trikampio ABC rasime

$$AB = \frac{b \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

2-s **žygis**. Abudu punktu yra neprieinamu.

Reikia, sakysime, išmatuoti atstogumas tarp dviejų neprieinamų punktų A ir B (ž. 31 brėž.). Pasirinkę ir išmatavę bazę CD = b, matuojam kampus ACB = α, BCD = β, CDA = γ, ADB = δ. Tuomet iš trikampio ACD apskaitydami AC = a ir iš trikampio CBD šoną BC = c, gausime:

31 brėž.

$$a = \frac{b \sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}, \quad c = \frac{b \sin(\gamma+\delta)}{\sin(\beta+\gamma+\delta)}$$

Tuo budu trikampyje ABC bus žinomu du šonu AC ir BC ir kampas tarp jų α, todel šonas AB duosis pigiai apskaityti.

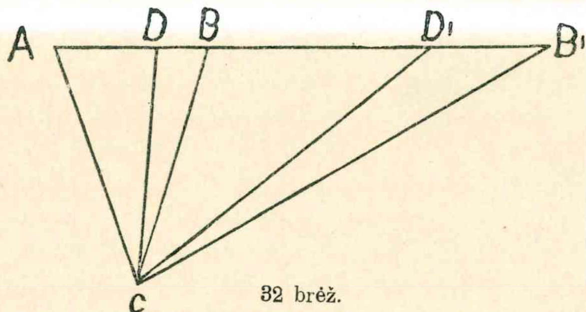
Jei punktai A, B, C, D guli ne viename plokštyje, tai kampas ACD nėra lygus $\alpha + \beta$ ir kampas BDC nėra lygus $\gamma + \delta$, taigi šiame atvejyje kampai ACD ir BDC reikia išmatuoti betarpiškai.

4 Uždavinys. Per prieinamąjį punktą pravesti tiesioji perpendikulerė bei paralelė duotajai neprieinamajai tiesiajai.

Sakysime, iš prieinamojo punkto C reikia pravesti paralelė neprieinamajai tiesiajai AB (ž. 31 brėž.). Elgdamies kaip praeitame uždaviny buvo nurodyta, apskaitom šonus AC ir BC ir kampą ABC trikampyje ABC. Tai padarius, pigu sužinoti kampo BAC dydis, kurs teesie = φ. Jei dabar iš punkto C pravesim tiesiųjų CE kampu lygiu 180 — φ, tai ji ir bus paralelė tiesiojai AB, nes tuomet suma kampų CAB + ACE = 180. Vesdami gi iš punkto C tiesiają kampu 90^0 į CE gausime perpendikulerę į CE ir AB.

68. Pastaba. Iš to kas augščiau sakyta, aišku, jog gaunamųjų gvildenant praktiškus uždavinius rezultatų griežtumas pareina nuo griežtumo matuojant bazę ir kampus. Taigi bazė taip reikia rinkti, kad kampai butu artimi 60^0, nes tuomet klaida daromoji matuojant kampus mažiausiai teveikia į apskaitymo griežtumą. Ištikrųjų teesie du trikampiu ABC ir AB'C (ž. 32 brėž.), kurių pirmutinis yra beveik lygiašonis. Du lygiu kampu DCB ir D'CB' tereiškia vienokią klaidą padarytąją matuo-

jant kampus ACB ir ACB'. Tuomet toms kampų lygioms klaidoms atitinkančios šonų klaidos bus DB ir D'B', iš kurių pirmoji, kaip matom iš brėžinio, bus žymiai mažesnė negu antroji. Taigi ir reikia laikytis taisyklės, kad kampai prie bazės nebutu mažesni per 30⁰.



32 brėž.

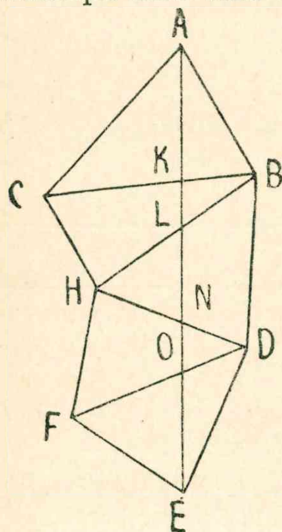
69. Triangulacija. Triangulacija bei trigonometriškuoju plano ėmimu vadinas toki žemės matavimo operacija, kurios pasigaunant, trikampiu gvaldymu apskaitoma pravestųjų žemės paviršiuje linijų ilgiai. Pav. kokios nors vietos punktai A, B, C, D . . . (ž. 33 brėž.) jungiama tiesiomis ir gaunama trikampių tinklas: ABC, CBH, HBD ir tt.; viena iš tų tiesiųjų, pav. AC matuojama betarpiškai ir vadinama p r a d i n e b a z e. Kiekviename trikampyje griežtais prietaisais matuojama kampai. Punktai žemės paviršiuje renkama taip, kad iš kiekvieno jų matytus bent trįs artimiausios viršunės. Trikampių viršunėmis A, B, C . . . renkama tokie punktai, kaip varpinių viršunės arba pastatytos augštesnėse vietose gairės. Gvaldant gautąją trikampių eilę, galima apskaityt tiesiųjų AB, CB, CH, HD, HF ir tt. ilgiai. Del kontrolės — be pradinės bazės, matuojama betarpiškai paskutiniame trikampyje dar kuris nors šonas pav. FD. Kiekvienas trikampis tenka gvaldyti turint du kampu ir šoną tarp jų. Ir ištikrųjų trikampyje ABC turime išmatuotą šoną AC ir du gretimu kampu, taigi galime apskaityti šono CB ilgį. Trikampyje CBH žinoma CB ir du gretimu kampu, taigi galima apskaityti HB ilgis ir tt.

Pasigaunant triangulacijos, apskaitoma meridiano lanko žemės paviršiuje bei paralėlės ilgis. Norėdami duoti supratimą apie šios rušies matavimą, prileiskime, kad AE (ž. 33 brež.) yra

meridiano dalis. Żymaus ilgio atrėžas AE betarpišku matavimu gauti sunku, kampai gi griežtais prietaisais sulyginamai lengva išmatuoti, todel matuojant kokią meridiano dalį, ir griebiamasi kampų matavimo ir trikampių gvaldymo. Tam tikslui iš abiejų tiesios AE šalių renkamosi eilė punktų B, C, H, D, F, kurie priimama trikampių ACB, CHB, HBD, HDF, FDE viršunėmis; tų trikampių šonai perkerta tiesiąją AE punktuose K, L, N, O. Betarpiškai matuojama bazės AC ilgis ir gretimų kampų trikampyje ABC dydžiai. Tai padarius, visi kiti trikampio ABC elementai lieka pigiai apskaitomi. Toliau trikampyje CHB šono BC galuose matuojama abu kampu ir apskatoma kiti to trikampio elementai. Tuo budu tęsiama kampų matavimas ir šonų apskaitymas lig tol, kol pasiekiama galutinis punktas E. Del kontrolės trikampyje FED matuojama betarpiškai dar šonas FE, kad sulyginus jo ilgį su ilgiu gautuoju iš apskaitymo.

Pabaigus pirmą apskaitymų eilę, imamasi antros, būtent apskaitimo atrėžų AK, KL, LN, NO, OE, sudarančių, jieškomąjį meridiano ilgį.

Tam tikslui matuojama griežtai kampas CAK sudaromas trikampio ABC šonu AC ir meridiano krypsniu.



33 brėž.

Tai padarius gvaldoma, augščiau nurodytu budu trikampis ACK ir surandama atrėžo AK ilgis.

Sekantis atrėžas KL surandama iš trikampio KLB šiuo budu. Iš trikampio AKC apskaitoma CK ilgis, todel KB = CB — CK. Be to, žinoma ir kampo CKA dydis. Bet CKA = BKL. Taigi galima išgvaldyti ir trikampis KLB ir todel sužinoti ir atrėžo KL ilgis.

Atrėžų LN, NO, OE ilgiai sužinoma panašiu budu, gvaldant trikampius HLN, NOD, FOE.

Galop ilgį AE surasime iš sumos AK + KL + LN + NO + OE.

Įvairųs uždaviniai.

Patikrinti formulos:

240. $\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} + a\right) - \text{tang}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = 2\,\text{tang}\,2a$?

241. $\sin 3a\ \text{cosec}\,a - \cos 3a\ \sec a = 2$?

242. $\sin^2 a = \cos^2(a - b) + \cos^2 b - 2\cos(a - b)\cos a\cos b$?

243. $\sin^2 a = \sin^2(a - b) + \sin^2 b + 2\sin(a - b)\cos a\sin b$?

244. $\cos^2 a - \cos^2 b = \sin(a + b)\sin(a - b)$?

245. $1 - \sin^2 a - \sin^2 b = \cos(a + b)\cos(a - b)$?

246. $\sin a\sin b + \sin(a + b + c) = \sin(a + c)\sin(b + c)$?

247. $\text{arc}\sin{}^4/_5 = \text{arc}\cos{}^3/_5 = \text{arc}\,\text{tang}{}^4/_3$?

248. $\text{arc}\sin{}^3/_5 + \text{arc}\sin{}^4/_5 = \frac{\pi}{2}$?

249. $\text{arc}\sin x = \text{arc}\,\text{tang}\frac{x}{\sqrt{1 - x}}$?

250. $\text{arc}\sin\left(\frac{p - q}{p + q}\right) = \text{arc}\,\text{tang}\left(\frac{p - q}{2\sqrt{pq}}\right)$?

251. $\text{arc}\,\text{tang}\left(\frac{x\cos a}{1 - x\sin a}\right) - \text{arc}\,\text{tang}\left(\frac{x - \sin a}{\cos a}\right) = a$?

Surasti bendra lanko x išvaizda, jei —

252. $\text{tang}\,x = {}^1/_3\sqrt{3}$? 253. $\cos x = -{}^1/_2$? 254. $3\,\text{cosec}^2 x = 4$?

Išgvildenti lyginiai?

255. $\sin^3 x + \cos^3 x = 0$?

256. $3\sec^4 x + 8 = 10\sec^2 x$?

257. $\text{cotg}\,x - \text{tang}\,x = \cos x + \sin x$?

258. $\sin^4 x - \cos^4 x = 2\sin 2x$?

259. $\sin x = \sqrt{27}\ .\ \sin(x + 30)$?

260. $\text{tang}\,x + 5\,\text{cotg}\,x - 6 = 0$?

261. $\text{tang}\,2x = 3\,\text{tang}\,x$?

262. $\cos x = \text{tang}\,x$?

263. $5^{\sin x} + 3^{\sin y} = 4$;
$3\ .\ 5^{\sin x} - 2\ .\ 3^{\sin y} = 5$?

264. $x + y = \frac{\pi}{4}$;
$2\sin x = \sin y$?

Surasti x iš lyginių:

265. $\text{arc}\,\text{tang}\,(x + 1) = 3\,\text{arc}\,\text{tang}\,(x - 1)$?

266. $\text{cotg}\,(\pi - 3x) = \text{tang}\,(x - \pi)$? 267. $\tan 3x = \sin bx$?

268. $16^{\sin x} + 3\ .\ 4^{\sin x} = 10$? 269. $\text{cotg}\,x\,\text{tang}\,2x - \text{tang}\,x\,\text{cotg}\,2x = 2$?

270. $\text{arc}\,\text{tang}\left(\frac{1}{x - 1}\right) - \text{arc}\,\text{tang}\left(\frac{1}{x + 1}\right) = 15^0$?

271. $4\sec x = 3\cos y$; $\cos(x-y) = 0{,}96$?

Logaritmuoti reiškiniai:

272. $\frac{m\tan g\, a\, \sin b + n\cos a}{n\tan g\, a\, \sin b - n\cos a}$?

273. $\frac{3\sin 43^0}{1-\cos 43^0}$?

274. $\frac{\cos^2 15^0 \tan g\, 15^0}{\cos^2 15^0 - \sin^2 15^0}$?

275. $\frac{1}{2}(m - \sqrt{m^2 - 4n})$?

276. $(a - b\tan g x)(a - \tan g x)^{-1}$?

277. $\cos x - \sin x$?

278. $\cos x + \sin x$?

Surasti tikrą dydį reiškinių:

279. $\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$ prie $x = 90^0$?

280. $(1 - \tan g x) : (\sin x - \cos x)$ prie $x = \frac{\pi}{4}$?

281. $\frac{1-\cos x}{1-\sec x}$ prie $x = 2\pi$?

282. $\frac{1+\sec 2x}{\sec x}$ prie $x = \frac{\pi}{4}$?

283. Kokią žemės paviršio dalį galima pamatyti pakilus 1 varstu virš žemės? Žemės stipinas = 6000 varstų.

284. Surasti tobulo 11-kampio plotas, jei apibrėžiamojo jį ratilo plotas yra = 23?

285. Išgvaldyti trikampis, jei jo vienas šonas yra a, kampų skirtumas $\beta - \gamma = k$, ir santykis $b : c = m$?

286. Iš hypotenuzės galo pravesta linija dalanti stattrikampio plotą pusiau. Kokiom dviem dalim jį dalo trikampio kampą $= 60^0$?

287. Jei matymo kampas yra mažesnis neg $40''$, tai mes jau nebegalim matyt daikto. Kokio ilgio turėtu buti alėja, kad stovint jos vidury butu galima matyt abu jos galu susiliejančiu vienan punktan. Alėjos platumas = a.

288. Laivas plaukia vienokiu greitumu prabėgdamas 5 metrus per sekundą. Laive pastatyta armota taip, kad jos šuvio krypsnis yra perpendikuleris į laivo bėgimo krypsnį. Kokiu kampu reikia pakreipti armotą, kad jos kulka palaikytu į daiktą atoką nuo laivo per 400 metrų. Kulkos greitumas = 400 metrų per sekundą?

289. Surasti talpa tobulos n-kampės prizmos, kurios augštis = h, o pamato šonas = a?

290. Surasti talpa tobulos n-kampės piramidos, jei jos augštis $= h$, o pamato šonas $= a$?

291. Tobulo tetraedro paviršis $= 4 m^2$; surasti jo augštis ir kampas sudaromas jo augščiu ir briauna?

292. Kuomet galimas šis lyginys: $2 ab \sin^2 x = a^2 + b^2$?

293. Neparalėliai trapecijos šonai yra lygus 3,51 ir 7,04; kampas tarp jų $= 90^0$. Surasti likusieji trapecijos kampai.

294. Kokiu kampu persikerta kubo diagonalės.

Trečioji dalis.

Geometriškas ir analitiškas trigonometrijos funkcijų išreiškimas.

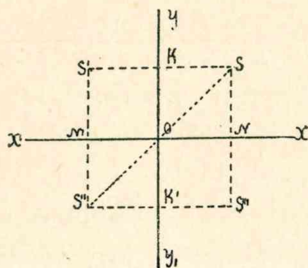
XIV Skirsnys.

Geometriškas trigonometrijos funkcijų išreiškimas.

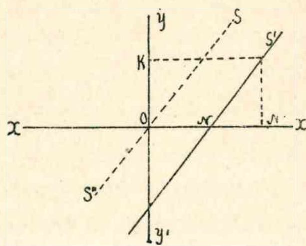
70. Koordinatos. Pirmoj šio vadovėlio dalyje mes esam davę trigonometrijos funkcijų sąvokojimą ir konstatavom esimą tarp jų tam tikrų santikiavimų, antrojoj esam nurodę tų funkcijų pritaikinimą trikampius begvaldant. Nun pilnumo delei belieka arčiau prisižiurėti tų funkcijų esybei geometrijos ir algebrinės analizės žvilgsniu.

Pritaikinimas šios pastarosios geometrijai yr pagaminęs atskirą matematikos šaką, pramintą analitiškaja geometrija, kuri parodo, kaip by koki algebrinė ar transcedenti funkcija geometriškai išreikšti. Priemonė, kurios pasigaunant tai įvykdoma, vadinas k o o r d i n a t ų metoda.

71. Dekartinės koordinatos. Teesie dvi tiesiaji XX_1 ir



34 brėž.



35 brėž.

YY_1 (ž. 34 brėž.) persikertanti punkte O stačiuoju kampu. By kokio punkto N tiesioje XX_1 ir by kokio punkto K tiesioje YY' padėjimas bus griežtai nustatytas, jei bus žinomi atrėžų OB ir OK ilgiai. Sutarę atrėžus tiesioje XX' dešinėn nuo punkto O laikyti teigiamais, turėsime atrėžus toje pat tiesioje nuo punkto O kairėn laikyti neigiamais ir žymėti minuso ženklu. Taip pat tiesioje YY' atrėžai nuo punkto O augštyn — bus teigiami, žemyn — neigiami. Tuo budu kiekvieną punktą tiesiose XX' ir YY' visada galėsime geometriškai nustatyti, išmatavę jų atstogumus nuo punkto O. Bet kaip nustatyti padėjimas by kokio punkto S, gulinčio ne tiesiose XX' ir YY', bet kuriame nors iš jomis sudaromų keturių statkampių? Tam tikslui nuleidžiama iš punkto S perpendikulerai SN į OX ir SK į OY ir matuojama jų ilgiai. Turint jų ilgius ir žinant, jog SN = OK ir SK = ON visada galima punktas S geometriškai nustatyti. Tam tikslui tiesioje OX imama atrėžas ON lygus SK ir tiesioje OY atrėžas OK = SN ir iš punktų N ir K vedama perpendikulerai SN ir KS, kuriuodu persikirsdamu ir nustatys punktą S. Perpendikulerai SK ir SN žymima paprastai raidėmis x, y ir vadinama punkto S koordinatomis, tiesios XX' ir YY' koordinatų ašimis, punktas O koordinatų pradžia. Kiekviena iš koordinatų x, y, turi dar ir atskirą vardą, butent x vadinas — abscisa, o y — ordinata. Pasigaunant koordinatų kiekvienas punktas išreiškiama simboliu (x, y), kame x ir y reiškia to punkto koordinatas. Mainantis punktui, mainysis ir jo koordinatos ne tik savo dydžio, bet ir savo ženklų žvilgsniu. Taip pirmame statkampyje YOX visos koordinatos bus teigiamos, antrame YOX' — ordinatos bus teigiamos, abscisos neigiamos, trečiame X'OY' visos koordinatos bus neigiamos, galop ketvirtame Y'OX abscisos bus teigiamos, ordinatos neigiamos. Matematikoj tos rušies koordinatos vadinas dekartinėmis nuo vardo jų išradėjo francuzų matematiko Descartes'o.

72. Poliarės koordinatos. Be dekartinių koordinatų galima dar kiekvieno punkto padėjimas plokštyje nustatyti ir kitokiu keliu. Tam tikslui sujungkim punktą S su koordinatų pradžia

O tiesioja SO. Tuomet iš 34 brėž. matom, jog punkte S padėjimas visada galima bus nustatyti, jei žinosime tiesiosios OS, žymimos paprastai raide ϱ ilgį ir jos palinkimą į ašį OX nustatomą kampu SOX, žymimu paprastai raide φ. Šiame atvejyje ϱ ir φ vadinas poliarėmis koordinatomis; jos matematikoj irgi dažnai esti vartojamos.

Poliarių koordinatų santikis su dekartinėmis savaime plaukia iš 34 brėž. ir duodas lengvai išreikšti šiais lyginiais:

$$x = \varrho \cos\varphi, \; y = \varrho \sin\varphi \; . \; . \; . \; . \; . \quad (135)$$

Žinant tuodu lyginiu lengva dekartinės koordinatos pakeisti poliarėmis ir poliarės dekartinėmis.

Kiekviena koordinatų sistema tarnauja dviem uždaviniam gvaldyti:

1) turint by kokią geometrišką liniją, surasti jos lyginys, pasigaunant tų ar kitų koordinatų, ir

2) turint by kokį lyginį, surasti atitinkanti jam geometriškoji linija. Paaiškinsime tai keliais paprasčiausiais pavyzdžiais.

73. **Išreiškimas geometriškųjų linijų lyginiais.** Norim pav. surasti lyginį atitinkanti tiesiajai OS, einančiai per koordinatų pradžią ir sudarančią su ašim OX kampą SOX $= \varphi$. Dydis φ čia prileidžiamas nemainomu. Kadangi trikampis SON yra statkampis, tai iš jo turim tiesiog

$$y = x \operatorname{tang}\varphi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (136)$$

Tai ir bus analitiškas tiesiosios OS lyginys, tinkąs nevien jos daliai OS kampe SOX, bet ir prailgintai OS″ kampe X′OY′.

Nun prileiskim kampą φ einant mažyn ir sumažėjus lig O; tuomet OS susilies su ašim OX; bet $\operatorname{tang}\varphi$ šiame atvejyje bus $=$ O, todel ir lyginys (136) virs: $y = 0$, kurs ir bus ašies XX′ lyginys.

Prileidus kampą φ didėjant lig 90^0, iš lyg. (136) gautumėm $y = x \, . \, \infty$, iškur $x = \frac{y}{\infty} = 0$, kurs ir bus ašies YY′ lyginys, nes kampui φ padidėjus lig 90^0, tiesioji OS susilies su YY′.

Jei tiesioji OS eitu ne per koordinatų pradžią, bet perkirstu ašį XX′ punkte M, (kurio abscisa OM $= x = m$) išlaikydama tą patį krypsnį, nustatytą kampu φ (ž. 35 br.), tuomet iš stattri-

kampio S'MN' rastumėm $y = (x - m) \operatorname{tang}\varphi = x \operatorname{tang}\varphi - m \operatorname{tang}\varphi$. Prileidę čion $\tan\varphi = a$, $m \operatorname{tang}\varphi = b$ galutinai gautumėm ieškomosios tiesiosios lyginį formoje:

$$y = ax + b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (137)$$

Vadinas kiekvienai tiesiajai gaunama 1-jo laipsnio lyginys.

Ir atvirsčiai, jei turim 1-jo laipsnio lyginį tipo $y = ax + b$, visada galim surasti atitinkančią jam tiesiąją, nes prileidę jame $x = 0$, rasime $y = b$; prileidę gi $y = 0$, iš to pat lyginio rasime $x = -\frac{b}{a}$. Turėdami gi du tiesiosios punktu (0, b) ir $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$, be vargo galėsime nubrėžti ir ieškomąją tiesiąją.

Nun teesie by koks ratilas nubrėžtas stipinu r. Tame ratile per centrą O praveskim statkampes koordinatų ašis XX' ir YY'. Ratilo ratlankyje imkim by kokį punktą S, kurio koordinatos teesie x, y. Sujungkim punktą S su O. Tuomet iš stattrikampio SON gausime lyginį

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (138)$$

Tai bus ratilo lyginys dekartinėse koordinatose.

Jei šin lyginin viet. x, y įstatytumėm jiems lygius dydžius $\varrho\cos\varphi$, $\varrho\sin\varphi$ iš (135), tai ratilui gautumėm kitą dar prastesnį lyginį, butent —

$\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi = \varrho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \varrho^2 = r^2$, arba galutinai

$$\varrho = r \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (139)$$

Tuo budu ratilui turime du lyginiu $x^2 + y^2 = r^2$ ir $\varrho = r$.

Ir atvirsčiai jei turėtumėm lyginį pav. tipo $x^2 + y^2 = r^2$, tai išgvildenę jį y-ko žvilgsniu, gautumėm $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Įstatydami pašaknin viet. x, įvairius dydžius, pradedant nuo O lig r, gautumėm y-kui eilę dvigubų atitinkančių dydžių, kurių pasigaudami galėtumėm nubrėžti eilę ieškomosios linijos punktų Sujungę tuos punktus tolydine linija, pamatytumėm, jog gautoji linija yra ne kas kita, tik paprastas ratilas.

74. Geometriškas kreivosios $y = \sin x$ vaizdas. Nun pažiurėkim, kokią išvaizdą turės kreivoji, reiškianti trigonometrijos

funkciją $y = \sin x$, kame x'u pažymėta tam tikro kampo lankas. Įgaunant šiam pastarajam reikšmių:

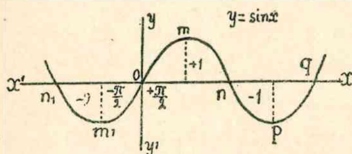
$$0, \frac{\pi}{2}, \pi, {}^3/_2\,\pi, 2\,\pi \ldots.$$

y įgaus reikšmių:

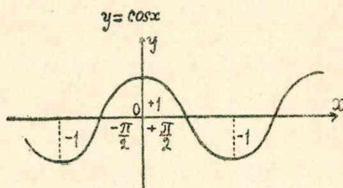
$$0, +1, 0, -1, 0, \ldots$$

Imkim x'o reikšmes tam tikrų punktų plokštyje abscisomis, o y'o — jų ordinatomis, ir nutarkim brėžinyje kiekvieną iš dydžių $\frac{\pi}{2}$ ir 1 reikšti vienu centimetru. Tuomet rasim, jog pirmoji koordinatų pora (0,0) nustato punktą 0 (koordinatų pradžią), antroji $\left(\frac{\pi}{2}, +1\right)$ punktą m, trečioji $(\pi, 0)$ — punktą n, ketvirtoji $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$, — punktą p ir tt. Prie x'o reikšmių $-\frac{\pi}{2}$ ir $-\pi$, y įgaus reikšmių -1 ir 0. Šiedvi koordinatų pori nustatys punktus m_1, n_1. Imdami lankus tarp 0^0 ir $\frac{\pi}{2}$, tarp $\frac{\pi}{2}$ ir π, tarp π ir $\frac{3}{2}\pi$, tarp $\frac{3}{2}\pi$ ir 2π ir tt., rasime eilę naujų punktų, gulinčių tarp *o* ir *m*, tarp *m* ir *n*, tarp *n* ir *p*, tarp *p* ir *q* ir tt. Sujungę gautuosius punktus tolydine linija, gausime kreivąją taip vadinamąją s i n u s o i d ą n, m, O m n p q, parodančią, vaizdžiai ordinatos (t. y. sino) mainymosi dėsnį, mainantis abscisai, t. y. lankui (žiur. 36 brėž.).

75. Panašiu budu galima nubrėžti ir kosinusoida išreikšta lyginiu $y = \cos x$, tangensoida $y = \operatorname{tang} x$ ir likusių trigonometrijos funkcijų kreivosios. Jos turės išvaizdą parodytą brėži-



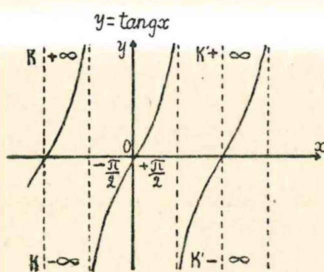
36 brėž.



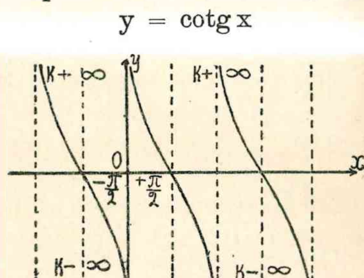
37 brėž.

niuose 37-me, 38-me, 39-me, 40-me ir 41-me. Paliekame patiems skaitytojams ištirti tų kreivųjų atitinkamybę žinomoms jau iš

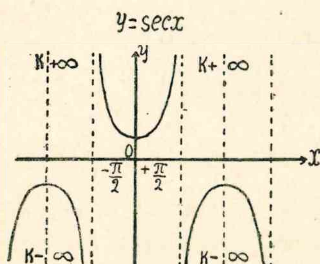
pirmos dalies išreikštų jomis funkcijų ypatybėms; ypač patariame atkreipti domę į tas lankų reikšmes, prie kurių kaikurios funkcijos, k. š. tangensas, kotangensas, sekansas ir kosekansas pertruksta, t. y. susyk maino ženklus pereidamos nuo $+\infty$ į $-\infty$.



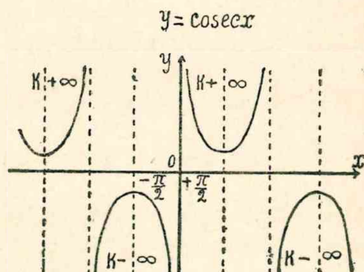
38 brėž.



39 brėž.



40 brėž.



41 brėž.

Ką del ratilinių bei atvirsčiųjų trigonometriškųjų funkcijų geometriškojo išreiškimo, tai užteks čia pasakius, jog jų kreivosios yra panašios į augščiau paduotasias trigonometriškųjų funkcijų kreivasias, tik yra kitaip pakreiptos.

XV Skirsnys.

Analitiškas trigonometrijos funkcijų išreiškimas.

76. **Trigonometrijos funkcijos ir kompleksiniai dydžiai.** Kompleksiniais dydžiais vadinama reiškiniai tipo $x \pm iy$, kame i reiškia $\sqrt{-1}$, o x, y yra by kokie realiai skaičiai. Kiekvienas toks dydis, pasigaunant trigonometrijos funkcijų, galima pakeisti reiškiniu $\varrho(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)$, kame ϱ reiškia tam tikrą teigiamąjį skaičių. Ir ištikrųjų prileidę $x = \varrho\cos\alpha$, $y = \varrho\sin\alpha$ randame $\varrho = +\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\alpha = \frac{x}{+\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{+\sqrt{x^2+y^2}}$, kas visai atitinka sin ir cos ypatybei, reikalaujančiai, kad tie dvi funkciji liktu visada nedidesni kaip vienetas. Reiškiniuose $\varrho(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)$ ϱ vadinama modulu, o lankas α argumentu. Aišku, jog modulas esti visai nustatytas dydis. Apie argumentą to pasakyti negalima, nes lankui, kaip žinom, galima visada tam tikrų ratlankių skaičių pridėti ir iš jo atimti, nemainant tuo trigonometriškųjų to lanko funkcijų.

77. **Moivre'o formula.** Teesie trigonometrijos funkcijomis išreikštu du kompleksiniu dydžiu: $\cos\alpha + i\sin\alpha$ ir $\cos\beta + i\sin\beta$? modulas jų dviejų ϱ yra lygus 1. Daugindami tuodu dydžiu vienas antru iš (51) ir (53) form. gausime:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta).$$

Padauginę abi tos lygybės dali trečiu kompleksiniu dydžiu $\cos\gamma + i\sin\gamma$, gausime:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\gamma + i\sin\gamma) = \cos(\alpha+\beta+\gamma) + i\sin(\alpha+\beta+\gamma)$$ ir tt.

Prileidę visus tuos daugiklius lygiais ir pažymėję jų skaičių raide *m*, rasime

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^m = \cos m\alpha + i\sin m\alpha \quad . \quad (140)$$

Ši lygybė vadinas Moivre'o formula. Ji yra tikra ir neskaidytam laipsniui m esant neigiamam, nes

$$(\cos\alpha + i\sin x)^{-m} = \frac{1}{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^m} = \frac{1}{\cos m\alpha + i\sin m\alpha}$$

Padauginę pastarojo skaidinio skaitiklį ir vardiklį reiškiniu $\cos m\alpha + i\sin m\alpha$ rasime:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-m} = \cos m\alpha - i\sin m\alpha \quad (141)$$

Ji lieka tikra ir prie skaidyto laipsnio. Ir ištikrųjų, kadangi

$$\left(\cos\frac{\alpha}{m} + i\sin\frac{\alpha}{m}\right)^m = \cos\alpha + i\sin\alpha,$$

todel traukdami *m* laipsnio šaknį iš abiejų tos lygybės pusių gausim:

$$(\cos a + i\sin\alpha)^{\frac{1}{m}} = \cos\frac{\alpha}{m} + i\sin\frac{\alpha}{m} \quad . \quad (142)$$

Keldami gi pastarąją lygybę n—tan laipsnin, rasime:

$$(\cos a + i\sin\alpha)^{\frac{n}{m}} = \cos\frac{n\alpha}{m} + i\sin\frac{n\alpha}{m} \quad . \quad (143)$$

Tuo budu Moivre'o formula lieka patikrinta ir prie skaidyto laipsnio.

Griežtai imant prie skaidyto laipsnio Moivre'o formula galima laikyti tikra tiktai su tam tikru apribojimu. Ir ištikrųjų nesunku išrodyti, jog lygybės:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{\frac{1}{m}} = \cos\frac{\alpha}{m} + i\sin\frac{\alpha}{m}$$

pirmoji dalis turi *m* įvairių reikšmių, tuotarpu antroji yra tik viena iš tų reikšmių. To dalyko išrodymui teesie k by koks teigiamas ar neigiamas neskaidytas skaičius; prie šios sąlygos gausime lygybę:

$$\cos(2\pi k + \alpha) + i\sin(2\pi k + \alpha) = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

ir todel

$$\left(\cos\frac{2\pi k + \alpha}{m} + i\sin\frac{2\pi k + \alpha}{m}\right)^m = \cos(2\pi k + \alpha) + i\sin(2\pi k + \alpha) = \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

O traukdami iš čia m-tą šaknį, rasime

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{\frac{1}{m}} = \cos\frac{2\pi k + \alpha}{m} + i\sin\frac{2\pi k + \alpha}{m}. \quad (144)$$

Panašiu budu išrodoma, jog

$$(\cos\alpha - i\sin\alpha)^{\frac{1}{m}} = \cos\frac{2\pi k + \alpha}{m} - i\sin\frac{2\pi k + \alpha}{m} \quad (145)$$

Dėdami pastaruosna lyginiuosna vieton k paeilinius skaičius 1, 2, 3 . . . lig m — 1 gausime m-tai šakniai m įvairių reikšmių, kurios visos skirsis nuo kita kitos, nes by kokių dviejų gretimų šaknų lankai turės skirtumą $\frac{2\pi}{m}$ visada mažesnį neg 2π. Jei vieton k tose pat formulose padėtumėm skaičius m, m + 1 . . . didesnius neg m — 1, tai šakniai naujų reikšmių nerastumėm, nes gautumėm rezultate tuos pat pirmykščius lankus, tik padidintus vienu ar daugiau ratlankių.

Iš čia savaime prieiname išvadą, jog augščiau gautoji Moivre'o formula skaidytam laipsniui $\frac{n}{m}$ (143) reikia pakeisti šia griežtesne:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{\frac{n}{m}} = \cos\frac{2\pi k + \alpha n}{m} + i\sin\frac{2\pi k + \alpha n}{m}. \quad (146)$$

78. Lankų dauginimas ir dalymas.

Jei Moivre'o formuloj

$$\cos m\alpha + i\sin m\alpha = (\cos\alpha - i\sin\alpha)^m$$

antrą jos dalį išrutulosme pasigaudami Newtono binomo formulos ir sulyginsime reales ir menamasias dalis, tai prie m neskaidyto gausim du lyginiu:

$$\cos m\alpha = \cos^m\alpha - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}\alpha\sin^2\alpha +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha - \dots \quad (147)$$

$$\sin m\alpha = m\cos^{m-1}\alpha\sin\alpha - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}\alpha\sin^3 +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}\cos^{m-5}\alpha\sin^5\alpha - . . \quad (148)$$

kuriuodu paduoda bendrą lankų dauginimo klausimo išgvaldymą.

Prileidžiant čia m lygiu 2,3,... gauname:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,\ \sin 2\alpha = 2\cos\alpha\,\sin\alpha$$
$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,\sin^2\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$
$$\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\,\sin\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \text{ ir tt.}$$

Iš formulų (147) ir (148) galima gauti taip gi bendras lankų dalymo klausimo išgvaldymas. Tam tikslui užtenka jose $m\alpha$ pakeisti α ir α reiškiniu: $\frac{\alpha}{m}$. Bet tos formulos yra gan painios, reikalaujančios ilgo analitiško tardymo. Trumpesnės lankų dalymo formulos galima gauti šiuo budu. Dėstydami ir imstydami augščiau išvestasias dvi formulas (144) ir (145) randame:

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{2\pi k+\alpha}{m} &= \tfrac{1}{2}\sqrt[m]{\cos\alpha + i\sin\alpha} + \tfrac{1}{2}\sqrt[m]{\cos\alpha - i\sin\alpha}\\ \sin\frac{2\pi k+\alpha}{m} &= \tfrac{1}{2}\sqrt[m]{\cos\alpha + i\sin\alpha} - \tfrac{1}{2}\sqrt[m]{\cos\alpha - i\sin\alpha}\end{aligned}\right\} \quad . \quad (149)$$

Žinant $\cos\alpha$ ir $\sin\alpha$, visada galima iš šių formulų surasti bendri algebriniai reiškiniai atitinkantieji $\cos\frac{\alpha}{m}$ ir $\sin\frac{\alpha}{m}$.

79. Išrutulojimas trigonometrijos funkcijų eilėmis. Trigonometrijos funkcijos $\sin x$, $\cos x$, kuriose x reiškia ilgį lanko nubrėžto stipinu = 1, galima išreikšti nesibaigiamomis eilėmis didėjančiais x'o laipsniais.

Tos eilės duoda patogią priemonę toms funkcijoms tiesiog apskaityti, neapskaitinėjant mažesnių lankų funkcijų.

Išrutulojimas $\sin x$ ir $\cos x$ eilėmis galima gauti iš lankų dauginimo formulų (147) ir (148). Ir ištikrųjų, pakeitus jose $m\alpha$ x'u ir α reiškiniu $\frac{x}{m}$ galima priduoti joms ši išvaizda:

$$\sin x = m\sin\frac{x}{m}\cos^{m-1}\frac{x}{m} - \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1\,.\,2}\,m^3\sin^3\frac{x}{m}\cos^{m-3}\frac{x}{m} +$$
$$+ \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)\left(1-\frac{4}{m}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\,m^5\sin^5\frac{x}{m}\cos^{m-5}\frac{x}{m} - \ldots$$

$$\cos x = \cos^m \frac{x}{m} - \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)}{1 \,.\, 2} \cos^{m-2}\alpha \sin^2 \frac{x}{m} +$$

$$\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} m^4 \sin^4 \frac{x}{m} \cos^{m-4} \frac{x}{m} - \ldots.$$

Prileidus čia m esant labai didelį skaičių, rasime jog lankas $\frac{x}{m}$ bus begaliniai mažas. Bet begaliniai mažo lanko kosinas gaima laikyti = 1, o sinas = pačiam lankui. Taigi m begaliniai didėjant, galėsime tik ką gautose formulose padėti $\cos\frac{x}{m} = 1$, $\sin\frac{x}{m} = \frac{x}{m}$. Skaidiniai $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$, $\frac{3}{m}$. . . prie tos pat sąlygos virs zerais. Todel padarę gautose formulose nurodytus pakeitimus galutinai gausime:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots \quad (150)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \,.\, 2} + \frac{x^4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots \quad (151)$$

Prie $-\infty \leq x \leq \infty$ abi tiedvi eili leidžia visada apskaityti $\sin x$ ir $\cos x$ norimuoju griežtumu[1]).

80. **Arktangenso eilė.** Teesie funkcija arctang x. Prileiskim, kad ji yra išdėstyta eilėn turinčion šią išvaizdą:

$$\operatorname{arctang} x = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots.$$

kame koeficientai a, b, c, d . . . yra kol kas nenustatyti; jų skaitmeninė reikšmė reikia surasti. Šis uždavinys gvildoma šiuo budu. Pirmiausia imam by kokią kitą tos pat rušies funkciją arctang y. Ji del padaryto augščiau prileidimo duosis irgi išdėstyti eilėn turinčion tą pat, kaip ir pirmam žygyj išvaizdą:

$$\operatorname{arctang} y = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + \ldots$$

1) Prie ratilinio kampų matavimo lankas x gaunama iš proporcijos $\alpha^0 : 360 = x : 2\pi$. Jei lankas x padidėtu tam tikru ratlankių skaičium k, tai ir atitinkąs jam gradų skaičius α^0 turėtu padidėti 360 . k gradų. Tuo budu gautumėm proporciją $(360 \,.\, k + \alpha^0) : 360 = (x + 2\pi k) : 2\pi$, iškur x'ui gautumėm vėl tą pačią ką ir pirma reikšmę $x = \frac{2\pi\alpha}{360}$.

Nun imkim tų dviejų arctangensų liekaną ir padalinkim reiškiniu x — y, tuomet gausim:

$$\frac{\operatorname{arc\,tang} x - \operatorname{arc\,tang} y}{x - y} = a + b\,(x + y) + c\,(x^2 + xy + y^2) +$$
$$+ d\,(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) + \ldots$$

Prileiskim laikinai kad arctang x = u, arc tang y = υ; iš čia gausim: x = tang u, y = tang υ. Tuo budu pirmoji augščiau paduotos lygybės pusė, padarius joje nurodytus pakeitimus, įgaus išvaizdą:

$$\frac{\operatorname{arctang} x - \operatorname{arc\,tang} y}{x - y} = \frac{u - \upsilon}{\operatorname{tang} u - \operatorname{tang} \upsilon} = \frac{(u - \upsilon) \cos u \cos \upsilon}{\sin u \cos \upsilon - \cos u \sin \upsilon} =$$
$$= \frac{(u - \upsilon) \cos u \cos \upsilon}{\sin\,(u - \upsilon)}$$

Jei nun prileisim, jog y begaliniai artinas į x, o todel ir v į u, tai ir sin (u — υ) kaipo begaliniai maž nuo zero besiskiriančio kampo sinas bus begaliniai maž tesiskirią̨s nuo atitinkančio jam lanko u — υ, taip kad einant zero ribon bus:

$$\frac{\sin\,(u - \upsilon)}{u - \upsilon} = 1$$

Delei to einant ton pat ribon bus

$$\frac{\operatorname{arctang} x - \operatorname{arc\,tang} y}{x - y} = \cos^2 u = \frac{1}{1 + \operatorname{tang}^2 u} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Tuo remdamies prie x = y gauname

$$\frac{1}{1 + x^2} = a + 2bx + 3cx^2 + 4dx^3 + 5ex^4 + \ldots$$

Bet tiesioginiu dalymu randame

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$

todel

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots = a + 2bx + 3cx^2 + 4dx^3 + 5ex^4 + \ldots$$

Šioje tapatybėje stovintieji abiejose jos pusėse prie tam tikro laipsnio x koeficientai turi buti lygųs, kitaip ši tapatybė butu negalima. Iš to gi koeficientų sulyginimo, randame, jog $a = 1$, $b = 0$, $c = -\frac{1}{3}$, $d = 0$, $e = \frac{1}{5}$ ir tt., todel galutinai gauname:

$$\operatorname{arctang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \qquad (152)$$

Prie $-1 \leq x \leq 1$ šioji eilė visada leidžia apskaityti arctang x norimuoju griežtumu [1]).

Jei šiame arctang x išrutulojime padėsim $x = 1$, tai turėdami omenėje, jog $\text{arctang}\, 1 = \frac{\pi}{4}$, gausim:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots \ldots \quad (153)^{2)}$$

Ši eile, kad ir gali tarnauti π apskaitymui, bet ji yra tuo nepatogi, jog ja naudojantis reikia imti labai daug jos narių, kad gavus π šiek tiek didesniu griežtumu. Tas tikslas kur kas lengviau pasiekiama vartojant kitas eiles, kurios nesunku iš šios pamatinės (153) išvesti. Tam tikslui imkim žinomąją tangensą dėstymo formulą:

$$\text{tang}\,(\alpha + \beta) = \frac{\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,\beta}{1 - \text{tang}\,\alpha \cdot \text{tang}\,\beta}$$

Jei joj padėsime $\text{tang}\,\alpha = u$, $\text{tang}\,\beta = v$, iškur $\alpha = \text{arctang}\,u$, $\beta = \text{arc tang}\,v$, tai rasime:

$$\text{tang}\,(\alpha + \beta) = \frac{u + v}{1 - uv} = \text{tang}\,(\text{arctang}\,u + \text{arctang}\,v)$$

o iš čia bus:

$$\text{arctang}\,u + \text{arctang}\,v = \text{arctang}\frac{u + v}{1 - uv} \quad \ldots \quad (154)$$

Šioje lygybėje turime arktangensų dėstymo teoremą.

---

1) Su šiuo arktangenso išrutulojimu eile (152) interesinga sugretinti tangenso išrutulojimą nesibaigiamu skaidiniu:

$$\text{tang}\,x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{9 - \ldots}}}}}$$

2) Su šio π išrutulojimu eile (153) interesinga sugretinti to paties π išrutulojimu nesibaigiamu skaidiniu:

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \ldots}}}}} \quad \text{arba} \quad \frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{7 + \cfrac{4^2}{9 + \cfrac{5^2}{11 + \ldots}}}}}}$$

Pirmutinis išrutulojimas pridera lordui Brouncker'ui (1620—1684), antrasis H. Wronskiui. Iš pastarojo daug greičiau gaunama tikrasis π dydis.

Jei čia u ir υ bus tikri skaidiniai parinkti taip, kad

$$\frac{u+\upsilon}{1-u\upsilon} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (155)$$

tai žinodami jog arctang 1 = $\frac{\pi}{4}$ iš form. (154) gausime:

$$\frac{\pi}{4} = \text{arctang}\, u + \text{arctang}\, \upsilon =$$

$$= \left(u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + \ldots\right) + \left(\upsilon - \frac{\upsilon^3}{3} + \frac{\upsilon^5}{5} - \frac{\upsilon^7}{7} + \ldots\right) . \quad . \quad (156)$$

Tinkamiems tam tikslui skaidiniams u ir υ nustatyti naudojamasi (155) formula, iš kurios gaunama:

$$u + \upsilon = 1 - u\upsilon$$

iš kur $$u = \frac{1-\upsilon}{1+\upsilon} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (157)$$

Padėjus antroj šio lyginio dalyj viet. υ by kokį tikrą skaidinį, gausime ir kitą atitinkantį dydžiui u skaidinį. Pav. jei $\upsilon = 1/2$, tai $u = 1/3$, todel iš (156) gausim naują Eulero pirmą kart paduotąją eilę:

$$\frac{\pi}{4} = \text{arctang}\ 1/2 + \text{arctang}\ 1/3 =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7}\right) + \ldots \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \ldots\right)$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad (158)$$

Dedant (155) lygybės antron dalin viet. vieneto $1/2$ ir darant pirmoj daly $u = 1/3$, rasime, jog $\upsilon = 1/7$; tuo budu galėsime arc tang $1/2$ pakeisti dviejų lankų sumą, išreikšta lyginiu:

$$\text{arctang}\ 1/2 = \text{arctang}\ 1/3 + \text{arctang}\ 1/7$$

kurių įstatę (158) lyginin, rasime:

$$\frac{\pi}{4} = 2\,\text{arctang}\ 1/3 + \text{arctang}\ 1/7 \quad . \quad . \quad (159)$$

Panašiu budu galime gauti ir dar kitų π apskaitymui formulų, pav.

$$\frac{\pi}{4} = \text{arctang}\ 1/3 + \text{arctang}\ 1/5 + \text{arctang}\ 1/8$$

$$\frac{\pi}{4} = 2\,\text{arctang}\ 1/5 + 2\,\text{arctang}\ 1/7 + \text{arctang}\ 1/8 \text{ ir tt.}$$

Bet dar labiau tinkanti šiam tikslui yra Machin'o formula. Ji gaunama šiuo budu. Teesie a = tangα racionalis skaidinys. Tuomet racionaliais skaidiniais bus ir tang2α, tang3α . . . tang$n\alpha$. Tai žinodami pasirinkim n tokį, kad tang$n\alpha$ butu kiek galima artimesnis vienetui. Nun prileiskim, kad $n\alpha > \frac{\pi}{4}$ todel bus

$$\text{tang}\, n\alpha = b > 1 \text{ todel } \text{tang}\left(n\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\text{tang}\, n\alpha - \text{tang}\frac{\pi}{4}}{1 + \text{tang}\, n\alpha\, \text{tang}\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{b - 1}{1 - b} = c$$

bus irgi racionalis skaidinys. Iš čia gauname:

$$n\alpha - \frac{\pi}{4} = \text{arctang}\, c, \text{ arba}$$

$$\frac{\pi}{4} = n\alpha - \text{arctang}\, c = n\, \text{arctang}\, a - \text{arctang}\, c \quad (160)$$

$$\text{Jei } a = \text{tang}\,\alpha = {}^1/_5, \text{ tai } \text{tang}\, 2\alpha = \frac{2\,\text{tang}\,\alpha}{1 - \text{tang}^2\alpha} = \frac{5}{12},$$

$$\text{tang}\, 4\alpha = \frac{2\,\text{tang}\, 2\alpha}{1 + \text{tang}^2 2\alpha} = \frac{120}{119}$$

Pastarasis dydis labai atitinka padarytam prileidimui tang$n\alpha > 1$, nes ir labai artimas vienetui ir draug yra bent kiek didesnis neg vienetas. Todel pažymėję skirtumą

$$4\alpha - \frac{\pi}{4} = c, \text{ gausim}$$

$$\text{tang}\, c = \text{tang}\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\text{tang}\, 4\alpha - \text{tang}\,\frac{\pi}{4}}{1 + \text{tang}\, 4\alpha\ 4\alpha\text{tang}\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{239}$$

Vadinas turėsime:

$$\alpha = \text{arctang}\ {}^1/_5,\ c = \text{arc tang}\ {}^1/_{239}$$

todel galutinai iš (160) gausime:

$$\frac{\pi}{4} = 4\ \text{arctang}\ {}^1/_5 - \text{arctang}\ {}^1/_{239} \ . \ . \ . \quad (161)$$

Išrutuloję $\operatorname{arctang}\frac{1}{5}$ ir $\operatorname{arctang}\frac{1}{239}$ eilėmis, rasime

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^4} - \ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \ldots\right)$$

Apskaitę 15 narių pirmoj eilės ir 4 antros, rasime π su 20 tikrų ženklų:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846$$

Jei sekdami Buzengeigeru padėtumem $\operatorname{tang}\alpha' = \frac{1}{10}$ tuomet rastumėm:

$$\operatorname{tang}2\alpha' = \operatorname{tang} 2 . \frac{1}{10} = \operatorname{tang}\frac{1}{5} = \frac{2 . \frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{20}{99}$$

todel pažymėję tang $1/5 = \alpha$, gautumėm:

$$\operatorname{tang}(2\alpha' - \alpha) = \frac{\frac{20}{99} - \frac{1}{5}}{1 + \frac{20}{99} . \frac{1}{5}} = \frac{1}{515}$$

o iš čia

$$\alpha = 2\alpha' - \operatorname{arctang}\frac{1}{515} = 2\operatorname{arctang}\frac{1}{10} - \operatorname{arctang}\frac{1}{515} = \operatorname{arctang}\frac{1}{5}$$

Įstatę gi tą $\operatorname{arctang}\frac{1}{5}$ reikšmę (161) formulon, gausime:

$$\frac{\pi}{4} = 8\operatorname{arctang}\frac{1}{10} - 4\operatorname{arctang}\frac{1}{515} - \operatorname{arctang}\frac{1}{239} \quad . \quad . \quad (162)$$

kuri dar greičiau veda į ieškomąjį rezultatą. Pav. norint gauti iš jos π septyniais griežtai tikrais ženklais, užtenka pirmos eilės apskaityti tik 4 narius, o likusių dviejų tik po 2.

81. Išreiškimas trigonometrijos funkcijų nesibaigiamais padaugais. Teesie lyginys $\sin x = 0$. Jis bus transcedentis, nes turės nesibaigiamą šaknų skaičių. Ir ištikrųjų duodami čia x'ui reikšmių: $x = 0$, $x = \pm\pi$, $x = \pm 2\pi$, $x = \pm 3\pi \ldots$, išvysime, jog prie visų jų pirmoji lyginio $\sin x = 0$ dalis daros lygi zerui. Šis faktas duoda mums teisės prileisti, jog reiškinyje $\sin x$ esame daugiklių x, $x^2 - \pi^2$, $x^2 - (2\pi)^2$, $x^2 - (3\pi)^2 \ldots$; todel galima padėti:

$$\sin x = a x (x^2 - \pi^2)(x^2 - 4\pi^2)(x^2 - 9\pi^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (163)$$

Iš čia gauname:

$$\frac{\sin x}{x} = a\,(x^2 - \pi^2)\,(x^2 - 4\,\pi^2)\,(x^2 - 9\,\pi^2)\;.\;.\quad (164)$$

Bet iš eilės:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \;.\;.\;.$$

randame

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} - \;.\;.\;.\;.\quad (164)'$$

iš kur matom, jog x'ui, einant zero ribon, santikis $\frac{\sin x}{x}$ bus lygus 1. Todel iš (164) prie $x = 0$ gausime

$$1 = a\,(-\pi^2)\,(-4\,\pi^2)\,(-9\,\pi^2)\;.\;.\;.\;.\quad (165)$$

Dalydami lygybę (163) lygybe (165) rasim:

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\ldots(166)$$

Panašiu budu galime rasti ir

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25}\right)\;.\;.\;.\;.\;.\quad (167)$$

Padėję (166) form. $\frac{\pi}{2}$ vieton x gausime:

$$1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{35}{36} \cdot \frac{63}{64}\;.\;.\;.\;.,$$

iškur randame taip vadinamąjį Wallis'o nesibaigiamą padaugą:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4\,.\,16\,.\,36\,.\,64\ldots}{3\,.\,15\,.\,35\,.\,63\ldots}\;.\;.\;. = \frac{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4\,.\,6\,.\,6\,.\,8\,.\,8\ldots}{3\,.\,3\,.\,5\,.\,5\,.\,7\,.\,7\,.\,9\,.\,11\ldots}\;(168)$$

Padėję ton pat (166) form. $\frac{\pi}{6}$ vieton x, gausime kitą nesibaigiamą padaugą:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3\,.\,6\,.\,6\,.\,12\,.\,12\,.\,18\,.\,18\ldots}{2\,.\,5\,.\,7\,.\,11\,.\,13\,.\,17\,.\,19\ldots}\;.\;.\;.\;.\quad (169)$$

Žinodami, jog $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ iš (166) form. randame

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{2^2.4}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2.4}\right)\left(1 - \frac{1}{6^2.4}\right)\;.\;.\;.,$$

o iš čia

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4\,.\,4\,.\,8\,.\,8\,.\,12\,.\,12\ldots}{3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\,.\,11\,.\,13\ldots}\;.\;.\;.\;.\quad (170)$$

Iš form. (168) ir (170) gauname:

$$\sqrt{2} = \frac{2.2.6.6.10.10\ldots}{1.3.5.7.9.11\ldots} \quad \ldots\ldots \quad (171)$$

Žinodami gi, jog $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, iš (167) form, randame:

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2.3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2.3^2}\right)\ldots, \text{ o iš čia}$$

$$\sqrt{3} = \frac{2.2.4.8.10.14.16\ldots}{1.3.3.9.9.15.15\ldots} \quad .\ . \quad (172)$$

Be nesibaigiamo (166) padaugo x'o sinui išreikšti, galima prieiti dar ir kitas, pasigaunant nesibaigiamai pusiau dalomo kampo x kosinų. Tai atsiekiama šiuo budu:

Iš lygybės:

$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ dalant abi jos pusi x'u gauname lygybę:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$$

kurion įstatinėjant vieton x vertes $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{4}$, $\frac{x}{8}$... prieinama ši naujų lygybių eilė:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$$

$$\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}}{\frac{x}{4}}$$

$$\frac{\sin\frac{x}{4}}{\frac{x}{4}} = \frac{\sin\frac{x}{8}\cos\frac{x}{8}}{\frac{x}{8}}$$

. . . .

$$\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{\frac{x}{2^{n-1}}} = \frac{\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}$$

Tų n lygybių padaugas duoda mums:

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\,\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}$$

Bet kadangi kampas $\frac{x}{2^n}$ yra begaliniai mažas, todel santikis $\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}$ sulig (164)′ bus = 1 ir todel galutinai gausim nesibaigiamąjį padaugą:

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\ldots\cos\frac{x}{2^n} \quad (172)'$$

Žinodami, jog prie $x = 90$ jam atitinkąs lankas bus $= \frac{\pi}{2}$, iš (172)′ form. gauname naują nesibaigiamąjį padaugą pačiam $\frac{\pi}{2}$ išreikšti. Jis turės šią išvaizdą:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\cos\frac{90^0}{2}\cos\frac{90^0}{4}\cos\frac{90^0}{8}\ldots\cos\frac{90}{2^n}} \quad (172)''$$

82. Išreiškimas trigonometrijos funkcijų simboliais e ir i. Teesie reiškinys $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, kame n yra by koks teigiamas neskaidytas skaičius. Norima sužinoti, kuo jis virs skaičiui n begaliniai didėjant.

Tam tikslui išrutulokim duotąjį reiškinį pasigaudami Newtono binomo formulos. Tuomet gausime:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n.\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{1}{n^3} + \ldots =$$

$$= 1 + 1 + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{1 \cdot 2} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (173)$$

Prie n begaliniai didėjančio skaidiniai $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$.. virsta zeru, o riba, kurion eina pats reiškinys $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n = \infty}$ pažymina simboliu e; tuo budu iš (173) gauname

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots = 2{,}7182818284 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (173')$$

Augštesnėj matematikoj *e* vaidina žymią rolę, kaipo naturalių logaritmų pamatas. Jei vietoj reiškinio $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ paimtumėm reiškinį $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx}$ ir padarytumėm augščiau nurodytą išrutulojimą, tai gautumėm eksponencialės funkcijos e^x išrutulojimą pavidale šios eilės:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (174)$$

Jei šion formulon x vieton įstatysim ix, tai gausim naują eilę:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{ix^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{ix^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - $$

$$- \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{ix^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots\right) +$$

$$+ i\left(x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots\right)$$

Sulyginę šį funkcijos e^{ix} išrutulojimo rezultatą su (150) ir (151) form. matom, jog

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (175)$$

Įstatę x vieton $-ix$ iš tos pat (174) form. gautumėm

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (176)$$

Dėstydami ir imstydami lygybes (175) ir (176) rasime:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (177)$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (178)$$

Formulos (177) ir (178) parodo sąryšį trigonometrijos funkcijų su funkcija e ir menamuoju dydžiu $i = \sqrt{-1}$.

Jei (175) formuloj x vieton įstatytumėm $\frac{\pi}{2}$, tai žinodami; jog $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$,

$$\text{gautumėm } e^{\frac{i\pi}{2}} = i \quad (179)$$

Imdami (179) lygybės abiejų pusių naturalius logaritmus, ir žinodami, jog $le = 1$, rasime dideliai įdomią, pirmą kart Jono Bernoullio išvestą formulą:

$$\frac{i\pi}{2} = li, \text{ iškur } \pi = \frac{2\,li}{i} \quad . \; . \; . \; (180)$$

Antra iš (175) lygybės išvada — tai galėjimas pakeisti kompleksinį dydį $\cos x + i \sin x$ trumpesniu ir daug patogesniu simboliu e^{ix}. Naujesniais laikais kaikurie matematikai tam pačiam tikslui yra prasimanę dar ir kitą lygiai trumpą ir gerą simbolį cis x, pavadinta cis u ir sudarytą iš pirmų kompleksinio dydžio simbolio raidžių *c*(os) *i* *s*(in)[1]).

Kaikuriuose trigonometrijos vadovėliuose, (k. š. Davidovo, Niewęglowskio ir k.) dedama dar įvairųs trigonometriškųjų funkcijų pritaikinimai, betyrinėjant lyginio $x^m = 1$ šaknis, begvildant 3-jo laipsnio lyginius, betardant žvaigždėtus daugiakampius ir tt. Mes visa tai apleidžiame kaipo dalykus, kad ir interesingus, bet didesnės svarbos neturinčius. Jų nėra ir kituose labiausiai išsiplatinusiuose trigonometrijos vadovėliuose.

[1]) Apie ciso ir e^{ix} pritaikomybę matematikos klausimus gvildenant, sk. straipsnį „Keletas žodžių apie menamąjį mainomąjį“ *A. Dambrausko,* Matematiškųjų Raštų III tome.



XV Skirsnys.

Naujos trigonometriškos sistemos.

Augščiau išdėtasai trigonometriškų funkcijų ir jų pritakinimo mokslas sudaro tam tikrą matematiškų tiesų sankuopą, kuri galima trumpai pavadinti musų paprastai vartojamosios trigonometrijos sistema. Jos pamatiniais elementais, kaip žinom, yra šešios trigonometriškos funkcijos sin, cos, tang, cotg, sec, cosec ir du nemainomu dydžiu: ratilo stipinas $\varrho = 1$ ir sinų bei tangensų krypsnis, nustatytas stačiuoju kampu $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Kiekvienos trigonometriškos funkcijos charakteris nustatoma tam tikrų trigonometriškų linijų santikiavimu. Atitinkantieji šešioms pamatinėms trigonometrijos funkcijoms santikiavimai, kaip jau žinom, yra šie:

$$\left.\begin{aligned} \sin &= \frac{s}{\varrho}, \ \text{tang} = \frac{t}{\varrho} = \frac{s}{c}; \ \sec = \frac{z}{\varrho} = \frac{\varrho}{c} \\ \cos &= \frac{c}{\varrho}, \ \text{cotg} = \frac{k}{\varrho} = \frac{c}{s}; \ \text{cosec} = \frac{q}{\varrho} = \frac{\varrho}{s} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (181)$$

kame s, c, t, k, z, q yra trigonometriškos sino, kosino, tangenso, kotangenso, sekanso, kosekanso linijos, o ϱ — ratilo stipinas. Prie $\varrho = 1$ visos šešios pamatinės trigonometrijos funkcijos sinas, kosinas, tangensas, kotangensas, sekansas ir kosekansas bus galima trumpai išreikšti simboliais s, c, t, k, z, q.

Pridurę čion dar augščiau minėtuoju du nemainomu dydžiu stipiną ϱ ir sinų krypsnį φ, gausime tam tikrą aštuonnarę, trigonometriškųjų dydžių grupę, kuri galima pažymėti simboliu G (s, c, t, k, z, q, ϱ, φ) arba dar trumpiau $G_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\varrho=1}$ nuo dviejų ją charakterizuojančių nesimainančių dydžių ϱ ir φ.

Atitikanti tai grupei musų paprastoji trigonometriškoji sistema pagal analogiją bus galima pažymėti simboliu $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\varrho=1}$.

Apibendrinant šį pastarąjį pigiai gaunama nauja trigonometrijos sistema $S_{\varphi=\alpha}^{\varrho=r}$, kurioje stipinas bus jau lygus nebe vienetui, bet tam tikram dydžiui r, o krypsnis bus nustatomas ne stačiuoju kampu, tik turinčiu α gradų.

Bet ir apibendrintoji $S_{\varphi=\alpha}^{\varrho=r}$ neapima visų galimų naujų trigonometrijos sistemų. Galimos yra sistemos ne tik su nesimainančiu stipinu ϱ ir kampu φ, bet ir turinčios visiems kampams vienokį nesimainantį siną, tangensą, sekansą bei vieną iš kitų trijų trigonometriškųjų funkcijų. Jos išreiškiama simboliais $S_{\varphi=\alpha}^{s=a}$, $S_{\varphi=\alpha}^{t=a}$, $S_{\varphi=\alpha}^{z=a}$, $S_{\varphi=\alpha}^{c=a}$, $S_{\varphi=\alpha}^{k=a}$, $S_{\varphi=\alpha}^{q=a}$.

Suprantamas dalykas, jog tose sistemose stipinas ϱ jau nebe bus vienokio didumo, bet virs atskira nauja trigonometriška funkcija ir kaipo toki turės kiekvienam kampui atskirą dydį.

Nėra butina sąlyga trigonometrijos sistemoms sudaryti, kad ir kampas φ turėtu nesimainantį dydį. Prileidus φ mainomuoju ir pavertus jį nauja trigonometrijos fnnkcija, galima prieiti naujų trigonometrijos sistemų, kuriuose vietoj ϱ ir φ nuolatinį dydį turės dvi kitos by kokios trigonometriškos funkcijos. Pav. sistemoje $S_{c=b}^{s=a}$ visų kampų sinai bus vienoki ir lygųs $=$ a, o drauge ir kosinai $=$ b; sistema $S_{z=b}^{t=a}$ turės nesimanančius tangensą, ir draug sekansą ir tt., bet užtat čia ϱ ir φ bus mainomi, kiekvienam kampui kitoki.

Tokių prastų sistemų rušių, turinčių po šešias by kokias mainomas funkcijos ir po dvi nemainomi, kaip parodo žinomoji derinimų (kombinacijų) formula

$$C_n^{(k)} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,.\,.\,.\,(n-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,k} = \frac{n}{(n-k)!\;k!}$$

bus viso labo 28.

Iš kiekvienos rušies, duodant jų elementams r, φ, r, a, bei a, b įvairias reikšmes, galima išvesti po begalinę daugybę naujų trigonometriškų sistemų. Visos jos yra ne fantazijos padaras, bet tikrai nustatyti matematiški faktai. Kiekviena iš tų sistemų turi savo atskiras trigonometriškas funkcijas, savo atskiras formulas, gan žymiai skiriančiasias nuo paprastos nun vartojamos trigonometrijos formulų.

Be to šis trigonometriškų sistemų skirtumas galima ne tik logiškai protui, bet ir geometriškai akims parodyti. Tai atsiekiama šitokiu budu: pabrėžus trigonometriškos sistemos geometriškąjį vaizdą su pravostomis vieno kokio kampo trigonometriškomis linijomis (žiur. 42 brėž.), kur SN = s reiškia duotosios

42 brėž

sistemos siną, TG = t josios tangensą, OT = z sekansą, ON = c kosiną, OK = OG = ϱ radijų bei stipiną, KQ = k kotangensą, OQ=q kosekansą, kampas XOB=φ sinų krypsnį, ieškoma geometriškosios vietos punktų S, T ir Q. Remiantis pamatiniais santikiais, išreikštais (181) lygybėse ir duotosios sistemos sąlygomis, galima visada punktų S, T ir Q geometriškosios vietos išreikšti tam tikrais lyginiais, pasigaunant paprastų Dekartinių koordinatų.

Tie lyginiai kiekvienai iš 28 prastujų sistemų yra paduoti mano veikaluose „Pri novaj trigonometriaj sistemoj“ Berline 1906 ir „Kreivujų linijų trigonometrizacijos pagrindai“ 1916 (dar

nespausdintas). Geometriškas punkto S vietas aš pavadinau sinusalėmis, punkto T — tangensalėmis, punkto Q — kotangensalėmis.

Perveizėjęs visus 28 sinusalių ir tangensalių lyginius, paduotuosius pirmoj savo brošuroj ir pastebėjęs, kad visų kitų sistemų lyginiai yra painesni neg atitinkantieji musų paprastajai trigonometrijos sistemai, aš ėmiau ieškoti naujų trigonometriškų sistemų su dar prastesniais sinusalių ir tangensalių lyginiais. Tie tyrinėjimai privedė mane prie sukrautinių trigonometriškų sistemų tipo:

$$S^{f(\varrho, \alpha) = a}_{\varphi(s, t) = b}, \quad S^{f(\varrho, s, z) = a}_{\varphi(c, z, q) = b}, \quad S^{s = f(a, b, x, y)}_{t = \varphi(a, b, x, y)} \text{ ir tt.}$$

Jų įvairumas ir skaitlingumas pasirodė begalinis, kaip ir pačių funkcijų.

Gilesnis to dalyko tyrinėjimas išvedė aikštėn dar štai ką:

1) Musų nun vartojamoji trigonometrija yra pati prastoji; kitos prastesnės už ją nėra nei tarp 28 prastųjų trigonometriškųjų, nei tarp begalinio skaičiaus sukrautinųjų.

2) Naujų trigonometriškųjų sistemų funkcijos yra arba tos pat ką ir musų paprastoj trigonometrijoj arba šių pastarųjų įvairios kombinacijos.

3) Kiekviena trigonometriška sistema visada turi tris charakterizuojančias ją linijas.

4) Kiekvienai linijai atitinka nemažiau trijų trigonometriškų sistemų.

5) Funkcijų mainomumo ribos kaikuriuose naujose trigonometriškose sistemose esti neretai žymiai platesnės neg musų paprastoj trigonometrijoj. Pav. kotangensas ir kosekansas sistemoj $S^{s = a}_{\varphi = \frac{\pi}{2}}$ mainysis ne tarp $+\infty$ ir $-\infty$, bet tarp $+\infty^2$ ir $-\infty^2$, sistemoj $S^{\varrho s = a^2}_{\varphi = \frac{\pi}{2}}$ tos pat funkcijos mainysis tarp $+\infty^3$ ir $-\infty^3$, sistemoj $S^{\varrho^{n-1} s = a^n}_{\varphi = \frac{\pi}{2}}$ tarp $+\infty^n$ ir ∞^n. Bet yra

ir sistemų, kuriuose nei viena funkcija neįgauna nesibaigiamai didelės reikšmės. Tokių sistemų pavyzdžiu gali buti sistema.

$$\mathrm{S}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{s+c+t\pm k+z+q+\varrho=\alpha}$$

6) Visos trigonometriškos sistemos mokslo žvilgsniu yra lygiateisės. Visų jų funkcijos taip pat galima taikint įvairiems mokslo uždaviniams gliaudyti, kaip ir musų paprastosios trigonometrijos funkcijos. Taigi musų paprastoji trigonometrijos sistema nėra nei absoluti nei vienintelė. Ji yra tik vienos bendresnės sistemos $\mathrm{S}_{\varphi=\alpha}^{\varrho=r}$ vienas iš nesibaigiamo daugumo jos žygių.

7) Ši pastaroji savo žaru yra viena iš 28 naujų prastų trigonometriškų sistemų, kurios taip gi gali turėti po begalinę daugybę rušių.

8) Šale tų 28 prastų sistemų esama dar ir įvairiausių sukrautinių trigonometriškų sistemų. Jų rušių skaičius taip gi begaliniai didelis.

9) Pritaikinimas naujų trigonometriškų sistemų kreivųjų linijų tyrimui pasirodė neapsakomai vaisingas. Taigi kaip pritaikinimas algebros geometrijai yr davęs pradžią naujam atskiram mokslui analitiškai geometrijai, taip pritaikinimas naujų trigonometriškų sistemų analitiškai geometrijai gali duoti pradžią naujai matematikos šakai, kurios tikslas bus kreivųjų teorijos trigonometrizacija.

Visos šitos išvados yra ne svajonės padaras, bet rezultatas matėmatiškų tyrimų, išdėtų ir išrodytų dviejuose mano reikaluose „Naujos trigonometriškos sistemos“ ir „Kreivųjų linijų trigonometrizacijos pagrindai“.

Naujos trigonometriškos sistemos yra tai visai nauja, neapsakomai plati ir vaisinga dirva, Vakarų Europos matematikų dar visai beveik nejudinta. Joje atsidaro tiek naujų, akypločių, randas tiek naujų tyrimo dalykų, kad darbo rasis čia net ir šimtui matematikų. Tame darbe priderėtu ir lietuviams užimti ne pastarąją vietą.

GALAS

Atsakai.

I (26 pusl.).

6. $\sin x = {}^3/_5$; $\cos x = {}^4/_5$. **11.** a) 72^0, b) $77^0 8' 28''$, c) $32^0 30' 52''$, d) 75^0, e) $70^0 42' 11''$, f) $19^0 48' 5'',1$. **12.** a) 0,40692, b) 0,9333, c) 0,32679. **13.** $\cos\alpha = {}^3/_5$, $\text{tang}\,\alpha = {}^3/_4$. **14.** a) $\frac{1}{\sin\alpha}$, b) $1 - 2\sin^2\alpha$. **15.** a) $\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$; b) $\frac{1}{\cos\alpha\,(1-\cos^2\alpha)}$. **16.** a) $\frac{1}{\text{tang}\,\alpha}$ b) $\left(\frac{\text{tang}^2}{1+\text{tang}^2}\right)^2$. **27.** $\sin 45^0 = \cos 45^0 = {}^1/_2 \sqrt{2}$. **30.** Suma kampų 120^0.

II (37 pusl.).

40. 1. **41.** 0. **42.** 4 ab. **43** 0. **44.** $\frac{2\,(a^2+b^2)}{a^2 - b^2}$. **45.** $-xy$. **46.** $(a+b)^3$. **47.** $a\,b\,(a+b)$. **48** b. **50.** $(a-b)\sin m$. **51.** $a^2 + b^2 - 2ab\cos x$. **52.** $\text{tang}\,\alpha - 2\,\text{tang}\,b$. **53.** $-(+\text{tang}\,a)$. **54.** $-\cos\alpha$ **60.** sinp.

III (50 pusl.).

67. Įstatyti lygybėsna $C = 180 - (a+b)$ ir išpildyti nurodytus veiksmus. **68.** -1; $-{}^1/_7$. **70.** 0,28. **71.** 0, -1. **84.** Prie $a + b = 0^0$ arba 360. **85.** ${}^7/_{24}$. **86.** $\frac{2\,m\,n}{m^2+n^2}$. **87.** $\frac{a-b}{a+b}$. **88.** $\frac{2\sqrt{n^2-1}}{m\,n}$.

IV (58 pusl.).

91. a) $2\cos 15^0$; b) $\sin(45^0 + a)$; c) $2\sin\left[45 - {}^1/_2\,(b-a)\right]\cos\left[45 - {}^1/_2\,(b+a)\right]$; d) $2\sin a\cos 3a$, e) $2\cos\frac{an}{2}\cos\left(\frac{n}{2} - 2\right)a$.

92. a) $\frac{\cos 20^0}{\cos 54^0}$; b) tang $(45^0 + a)$. **93.** a) $x = a\sec\varphi$; $b = a\,\mathrm{tang}^2\varphi$; b) $x = a \sin\varphi$; $b = a \cos^2\varphi$; c) $x = \mathrm{tang}^2\varphi$, $b = a\cos\varphi$. **94.** $x = 4 \sin\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) \sqrt{\mathrm{tang}\,\alpha}$; $\cos\varphi = {}^1/_4 \cos\alpha$. **95.** $x = \sqrt{ab}\sec\varphi$; $\frac{a^2 + b^2}{a\,b} = \mathrm{tang}^2\varphi$. **96.** $x = 2a\cos\frac{\varphi}{2}$; $b = a\sin\varphi$. **97.** $x = (a + b)\sin\varphi$; $\cos\varphi = \frac{2\sqrt{ab}\,.\,\cos\alpha}{a + b}$. **98.** $x = a\sin\alpha \sin^2\varphi$; $b \sin\beta = a\sin\alpha\cos^2\varphi$. **99.** $x = \frac{a\sin\alpha}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}$; $a\cos\alpha = \cos\varphi$. **100.** $\cos b \cos(2a + b)$. **101.** $\frac{\cos(b-a)}{\cos a \sin b}$. **102.** $\frac{a\cos(x-\varphi)}{\cos\varphi}$; $a\,ng\varphi = \frac{b}{a}$. **103.** $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$, todel $1 + \cos a + \sin a =$
$$2\cos^2\frac{a}{2} + 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = 2\cos\frac{a}{2}\left(\cos\frac{a}{2} + \sin\frac{a}{2}\right) =$$
$$= 2\sqrt{2}\cos\frac{a}{2}\cos\left(45 - \frac{a}{2}\right).$$

V (71 pusl.).

115. lg cos $42^0 15' 10'' = 9{,}86934$; lg tang $63^0 18' 24'' = 0{,}29861$. **118.** $x = 43^0 30' 55''$. **119.** lg cosec $34^0 17' =$ lg 1 — lg sin $3417' = 0{,}24927$. **120.** $\sin 40^0 = 0{,}64278$; tang $119^0 40'' = -1{,}7556$. **121.** 0,40284. **122.** $147^0 33' 19''$, antras pavyzdys yra negalimas. **124.** 1528,2 **125.** 0,97992. **126.** $209^0 47' 27''$. **128.** 1. **129.** ∞. **130.** $\frac{\sqrt[4]{8}\sin 10^0}{\cos^2 41^0 29' 46''} = 0{,}52055$. **131.** $\frac{2{,}4567\sqrt[3]{4}}{\cos^2 46^0 37' 33} = 8{,}2684$. **133.** 9,4337; — 369,8537. **134.** — 1,2317; — 822,2 **135.** — 0,052272; — 1169. **136.** — 0,49777; — 0,5151. **139.** $1^0 45' 30''$. **140.** a) — 0,958; b) 0,99998.

VI (79 pusl.).

141. $\sin x - \frac{\sqrt{1 \pm \sqrt{1 \cdot 4m^2}}}{2}$. **142.** $2\sqrt{2}$. **143.** $\frac{b}{a}$. **144.**

$\cos x = {}^1/_2$. **145.** $\operatorname{tang} x = \frac{m}{n}$. **146.** 1; ${}^1/_2$. **147.** $\sqrt[3]{{}^3/_{10}}$. **148.** $\pm\, {}^1/_2 \sqrt{2}$; $\pm\, {}^1/_3 \sqrt{3}$. **149.** $\sin z = \sqrt[4]{{}^4/_5}$. **150.** $\pm \frac{\sqrt{a-b}}{2}$; $\pm \frac{\sqrt{2-a-b}}{2}$. **151.** ± 1; 0; 0. **152.** $\pm\, {}^1/_2$; $\pm\, {}^1/_2 \sqrt{2}$ **153.** $\sin t = {}^1/_{65} \sqrt{65}$. **154.** $x = 45^0$. **157.** $\sin x = {}^1/_2 \cos a \sqrt{2}$. **159.** $\sin x = \frac{b}{a}$. **160.** $x = 30^0$. **163.** $\cos x = {}^1/_2 (-1 + \sqrt{5}) = 2 \sin 18^0$; $x = 51^0 49' 38''$. **164.** $19^0 39' 7''$; $3^0 39' 7''$. **165.** $\cos x = \frac{\sqrt{m - 2\sin^2 a}}{2\cos 2a}$. **166.** $\sin z - \frac{\sin a}{\sqrt{m^2 + 1 - 2m\cos a}}$. **167.** $\operatorname{tang} x = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{m}{\operatorname{tang} a} - 1}$. **168.** $\operatorname{tang} x = \frac{(m+1)\operatorname{tang} a}{m-1}$

169. $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$; 170 a) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; b) $n \cdot 180^0 \pm 45^0$.

VII (89 pusl.).

174. Lygybę $a + b + c = a(1 + \sin\gamma + \cos\gamma)$ keliam į kvadratą. **176.** $\sec 2\beta = -\sec\gamma$; antroji formulos dalis $= \frac{\cos\gamma + \sin\gamma}{\cos\gamma - \sin\gamma}$; $\sin\gamma$ ir $\cos\gamma$ išreikšti pasigaunant šonų. **179.** Iš pirmojo lyginio randame $c^2 = \frac{a^3 + b^3}{a + b}$; toliau, kadangi $\frac{c^2}{a\,b} = \frac{\sin^2\gamma}{\sin\alpha \sin\beta} = 1$, tatai $ab = c^2 = \frac{a^3 + b^3}{a + b}$, iš kur $a = b = c$.

180. Pakeitę sumą padaugu, rasime $\operatorname{tang}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \sin\gamma$, o iš čia ir iš lyg.: $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ gausim $\gamma = 90^0$. **181.** Pakeisti suma padaugu. **182.** $\sin\gamma = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \operatorname{tang}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$; todel $2\sin^2\frac{\gamma}{2} = 1$; $\gamma = 90^0$.

VIII (108 pusl.).

183. 10^0; 545; 25397. **184.** $36^0 10' 7''$; 18,256; 225,19. **185.** 250,03; 575; 71880. **186.** 7,5744; 4,7865. **187.** $24^0 46'$; 3,917; 16,628. **188.** 54,564; 30,116. **189.** 3,6568; 4,6633; 5,2914. **190.** 0,55276; 0,60055. **191.** 2,231; 1,7218. **192.** 1,0756; 0,84415; 0,28139. **193.** $43^0 18' 53''$; 0,62474. **194.** 0,58779; 0,80902; 0,23777. **195.** 0,77464. **196.** 12,694, $p = 27,782$. **197.** $79^0 36' 30''$; 2,42; $p = 7,988$. **198.** 17; 5,2; $p = 43,68$. **199.** 156,37; 2,48. **200.** 7,82, 6,306, 4,625. **201.** 36; 27. **202.** 36,178; 11,636; 34,258. **203.** $\frac{m(\sqrt{5}-1)}{2}$; $\frac{m(3-\sqrt{5})}{2}$; $m\sqrt{5-2\sqrt{5}}$; $58^0 16' 58''$. **204.** Katetų santikis $= {}^3/_4$. **205.** Katetų santikis $= {}^3/_4$. **206.** 33; 44; 55; $53^0 7' 50''$. **207.** $25^0 19' 22''$; $154^0 40' 48''$. **208.** $2r \sin\frac{b}{2}$. **209.** 0,95885 r. **210.** $\arccos\frac{a}{2r} + \arccos\frac{b}{2r}$; $118^0 6' 50''$. **211.** Negali. **212.** 23984 žemės stipinams. **213.** Saulės stip. = 111,7 žemės stip. **214.** 364,05. **215.** $\operatorname{arctang} 2\pi^{-1}$.

216. $47^0 9' 55''$; $99^0 2' 55''$; 7,8112 arba $132^0 50' 5''$; $13^0 21' 55''$; 1,8283. **218.** 15,365; $56^0 41' 50''$. **219.** 659,33; 599,46. **220.** 18,773; 11,285. **221.** $109^0 6' 15''$; 62,256. **222.** $36^0 52' 12''$; 90^0. **223.** 33,893; 26,691. **224.** 90^0; 1000; 500. **225.** 36,916; 35,358; 56,176. **226.** Negalimas. **227.** Negalimas. **228.** 4550,9. **229.** 300. **230.** Teesie L lėktuvo padėjimas, H punktas žemėj gulįs vertikaliai po L. Tuomet $HL = BH \operatorname{tang}\beta = AH \operatorname{tang}\alpha$; $\frac{AH}{BH} = \frac{\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha} = \frac{\sin ABL}{\sin BAL}$; o kadangi $ABL + BAL = \alpha + \beta$, tai iš nurodytų sątikių pigu surasti šonai AL ir LH. **231.** $\frac{h \sin(m+n)}{\sin(m-n)}$. **236.** 0,8097; 8,3302. **238.** 4,3128. **239.** 137,19.

IX (118 pusl.).

255. 135^0. **256.** 45^0 ir 30^0. **257.** 135^0. **258.** $76^0 43' 3''$ ir $166^0 43' 3''$. **259.** $143^0 24' 50''$. **260.** 45^0 ir $78^0 4' 24''$. **261.** $n\pi$; $n\pi \pm {}^1/_6\,\pi$. **262.** $\arcsin {}^1/_2(\sqrt{5}-1)$. **263.** $2n\pi + 36^0 25' 11''$

ir $2n\pi + 17^0 49'38''$ arba $2n\pi + 143^0 34'49''$ ir $2n\pi + 162^0 9'54''$. **264.** $30^0 21'41''$; $14^0 38'19''$. **265.** Iš trilinko lanko formulos randama $x + 1 = \frac{3(x-1) - (x-1)^3}{1-3(x-1)^2}$, o iš čia $2x^3 - 4x = 0$, iškur galop $x = \sqrt{2}$. **266.** Duotasai lyginys virsta į $\operatorname{cotg} 3x = -\operatorname{tang} x$, iš kur gaunama $\operatorname{tang}^4 x = 1$; $x = 45^0$ ir 135^0. **267.** $3x = z$; $\operatorname{tang} z = \sin 2z = \frac{2\operatorname{tang} z}{1+\operatorname{tang}^2 z}$; $\operatorname{tang} z(\operatorname{tang}^2 z - 1) = 0$; $\operatorname{tang} z = 0$ ir ± 1. Jei $\operatorname{tang} z = \operatorname{tang} 3x = 0$, tai $\operatorname{tang}^3 x - 3\operatorname{tang} x = 0$, $x = 0^0$, 60^0 ir 120^0. Jei $\operatorname{tang} 3x = 1$, tai paleidžiant $\operatorname{tang} x = y$, gausim $y^3 - 3y = 3y^2 - 1$ arba $(y^2 - 4y + 1)(y + 1) = 0$, iškur $\operatorname{tang} x = y$'ui atitiks dydžiai -1; $2 \pm \sqrt{3}$ ir x'ui kampai $135^0, 75^0$ ir 15^0; galop jei $\operatorname{tang} 3x = -1$, tai iš lyg. $y^3 - 3y = 1 - 3y^2$ rasime $\operatorname{tang} x = 1$; $\sqrt{3} - 2$ ir $-2 - \sqrt{3}$ iškur $x = 45^0, 165^0$ ir 105. **268.** 30^0; 150^0. **269.** $\operatorname{arctang}(\pm\sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}})$. **270.** $\pm\sqrt{2(2+\sqrt{3})}$; $53^0 7'50''$; $36^0 52'10''$. **271.** $x = \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(\alpha - \varphi)}$; $\operatorname{tang}\varphi = \frac{n \cdot \cos a}{m \cdot \cos b}$. **275.** $\frac{m(1 - \cos z)}{2} = m \sin^2 \frac{z}{2}$, kame $\sin^2 z = \frac{4n}{m^2}$. **276.** $\frac{\sin(z-x)}{\sin(z+x)}$, kame z randame iš lyg $\operatorname{tang} z = \frac{a}{b}$. **277.** $\cos x + \sin x = \cos x(1+\operatorname{tang} x) = \cos x(\operatorname{tang} 45^0 + \operatorname{tang} x) = \frac{\sin(x + 45^0)}{\cos 45^0} = \sin(x+45^0)\sqrt{2}$. **278.** $\sin(45 - x)\sqrt{2}$. **279.** $1/2$. **280.** $-\sqrt{2}$. **281.** -1. **282.** 0. **283.** Ratilinį plotą stipinu = 1095,3 verst. **284.** 21,77. **285.** $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{m+1}{m-1}\operatorname{tang}\frac{k}{2}$. **286.** $40^0 53,36''$. **287.** Ilgis 10313 kartų didesnis neg plotis. **288.** $42^0 58''$. **289.** $na^2h : 4\operatorname{tang}\left(\frac{180}{n}\right)$. **290.** $\frac{a^2 n h}{3 \cdot 4}\operatorname{cotg}\left(\frac{180}{n}\right)$. **291.** $\arcsin\sqrt{2/3}$. **291.** $a - b \angle o$. **292.** $\arcsin(2/3\sqrt{2})$. **293.** $63^0 30'$; $26^0 30''$.

Prieš skaitysiant

prašoma tekste ištaisyt šios spaudos klaidos:

		Atspausta:	Turi buti:
4	pusl.	1 eil. iš ap.: dažinus	pažinus
10	„	1-me brėž. apač. viet. B	B′
11	„	6 eil. iš virš.: delei kampų	delei centralių kampų
11	„	11 „ „ „ koks kampas	koks centralis kampas
15	„	(11) form. $\frac{\varrho}{s}$	$\frac{s}{\varrho}$
18	„	7 eil. iš virš.: kurios ir vadiname	kurios ir vadinama
20	„	(18) form. $c' = \varrho' = \cos\alpha$	$c' = \varrho' \cos\alpha$
24	„	(28) form. $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$	$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+1}}$
26	„	14 užd. a) $\operatorname{cotg}\alpha + 1 \frac{\sin\alpha}{+\cos\alpha}$	a) $\operatorname{cotg}\alpha + \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$
36	„	5 eil. iš ap: panašiu kitu	panaši kiti
37	„	7 eil. iš virš.: 1 π	2 π
43	„	(51″) form.: $\cos(180^0 \ \alpha)$	$\cos(180^0 - \beta)$
46	„	(69) form. $\sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha^2}}$	$\sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}}$
72	„	15 eil. iš ap. 21:	131.
74	„	2 užd.: $^3/_4 + \sin x$	$^3/_4 + \sin^2 x$
76	„	5 e iš virš.: lyginių gvaldant	lyginius gvaldant
94	„	7 eil. iš ap.: $\dot{B} = 180^0 - 2\alpha$	$\beta = 180^0 - 2\alpha$
95	„	11 eil. iš ap.: $pa \sin\alpha$	$pa \lg \sin\alpha$

		Atspausta:	Turi buti:
101	pusl.	5 e. iš ap.: katetų	katetą
113	„	4 e. iš vir.: Turint a ir b	Turint α ir b
113	„	11 e. iš vir.: pasilaiko	pasitaiko
115	„	11 e. iš ap.: tiesiojai	tiesiajai
118	„	267 užd.: sinb x	sin 6 x
121	„	XIV Skirsnys	XIII Skirsnys
121	„	35 brėž. XX	X'X
121	„	1 e. iš ap.: XX_1	XX'
122	„	1 e. iš vir.: YY_1	YY'
122	„	2 e. iš vir. XX_1	XX'
127	„	XV Skirsnys	XIV Skirsnys
128	„	8 e. iš vir.:	
		$\cos m\alpha + i\sin m\alpha$	$\cos m\alpha - i\sin m\alpha$
129	„	9 e. iš ap.	
		$(\cos\alpha - i\sin\alpha)^m$	$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^m$



Turinys.

Trečioji dalis. Geometriškas ir analitiškas trig. funkcijų išreiškimas.

514.1(07)

E. Jagomasto spaustuvė „Lituania“, Tilžėje
Aukštoji gatvė 78 Nr.